УДК 517.86

М.Н. Подоксенов

# О несущественности нормальной подгруппы транзитивной группы конформных преобразований

Группа H конформных преобразований псевдориманова многообразия $(M,g)$ называется несущественной, если существует такая метрика $\bar{g}$ на $M$, конформно эквивалентная $g$, что $G$ будет группой изометрий многообразия $(M,\bar{g})$, и существенной в противном случае.

**Теорема.** *Пусть* $G$ *– транзитивная группа конформных преобразований риманова или лоренцева многообразия* $(M,g)$, $H$ *– ее нормальная подгруппа. Предположим, что* $H$ *обладает неизотропной орбитой* $N$ *и стационарная подгруппа* $H_p$ *связна для некоторого* $p\in M$. *Тогда* $H$ *является несущественной группой конформных преобразований.*

Аналогичная теорема для случая, когда H является однопараметрической подгруппой, действующей без неподвижных точек, была доказана в [1]. В случае, когда H обладает неподвижной точкой, две похожие теоремы были доказаны в [2] и [3].

Следующий пример показывает, что данная теорема не верна, когда все орбиты группы H изотропны.

Пусть $M$ – двумерное пространство Минковского с координатами $(u,v)$ и метрикой $ds=dudv$. Пусть $\Phi=\{\varphi_t\}$ – однопараметрическая группа преобразований, действующая по формуле $\varphi_t(u,v) = (e^{2t}u,v)$.

Пусть $\Psi=\{\psi_t\}$ и $\Theta=\{\theta_t\}$ – группы переносов: $\psi_t(u,v) = (u+t,v)$ и $\theta_t(u,v) = (u,v+t)$. Нетрудно убедиться, что группа $\Theta$ коммутирует с $\Phi$ и с $\Psi$. Пусть H – группа преобразований, порожденная группами $\Phi$ и $\Psi$. Тогда H будет группой гомотетий, причем H – существенная группа конформных преобразоваваний. Пусть G – группа преобразований,порожденная группами H и $\Theta$. Тогда G является группой конформных преобразований, и H является нормальной подгруппой в G. При этом, все орбиты группы H изотропны.

Доказательство. Поскольку $H$ – нормальная подгруппа в $G$, то всякий элемент $a\in G$ переводит каждую орбиту группы $H$ в орбиту группы $H$. Кроме того, все стационарные подгруппы группы H сопряжены друг другу и поэтому $H_p$ связна для любого $p\in M$.

Пусть $p\in N$ – произвольная точка. Пусть $h$ – произвольный элемент из стационарной подгруппы $H_p$. Тогда $hN=N$, а значит, $(h_*)_p(T_pN)=T_pN$. Следовательно, преобразование $(h_*)_p:T_pM\to T_pM$ оставляет инвариантным ортогональное дополнение $(T_pN)^\perp$ к $T_pN$ в $T_pM$. Обозначим $\alpha: G\to M$ – отображение группы $G$ на орбиту точки $p$ : $\alpha(f)= fp$, $f\in G$.

Рассмотрим отображение $(\alpha_*)_p:T_pG\to T_pM$. Пусть $L=(\alpha_*)_e^{-1}((T_pN)^\perp)$ – прообраз ортогонального дополнения к $T_pN$. Пусть $G'=\exp L$ – подмногообразие в группе Ли $G$, $M'=\alpha(G')$. Тогда $M'$ представляет собой множество всех орбит однопараметрических подгрупп из $G$, таких, что вектор, касательный к орбите в точке p, принадлежит $(T_pN)^{\perp}$. Поэтому мы можем сказать, что $M' \perp N$ в точке p . Значит существует такая окрестность W точки p в M', что в каждой точке $q \in W$ подмногообразие M' трансверсально орбите H .

Пусть теперь $\Phi = \{\varphi_t\}$ – произвольная однопараметрическая подгруппа из $G'$ и $t_0 \in R$ . Пусть $q = \varphi_{t_0}(p)$ . Поскольку H – нормальная подгруппа в G , то $\varphi_{t_0}(N) = Hq$ . Кроме того, орбиты Hq и $\Phi p = \Phi q$ ортогональны в точке q .

Пусть $\psi_t = h\varphi_t h^{-1}$. Тогда $\Psi = \{\psi_t\}$ есть однопараметрическая подгруппа и ее орбита $\Psi p$ есть образ орбиты $\Phi p$ под действием h: $h(\Phi p) = \Psi p$ . Поскольку h – конформное преобразование, то $\Psi p$ ортогонально N , а значит $\Psi p \subset M'$ и $\Psi \subset G'$. Из этого вытекает, что

$$h(M') = M'. \tag{1}$$

Кроме того $h \in H$ , а значит для любой точки $q \in M'$

$$h(Hq) = Hq. \tag{2}$$

Если теперь допустить, что для каждого $q \in W$ орбита Hq пересекает M' не более одного раза, то из (1) и (2) получаем, что $h(W)=W$ и

$$h|_W = id_W . \tag{3}$$

Предположим, что (3) не выполнено. Тогда для некоторого $q \in W$ будет $r = hq \neq q$ , но при этом $r \in M'$ и $r \in Hq$ .

Допустим сначала, что h можно соединить однопараметрической подгруппой $\Theta \subset H_p$ с единицей $e \in H_p$, $h = \theta_{t_0}$. Тогда кривая $\gamma(t) = \theta_t q$, $t \in [0,t_0]$ будет соединять точки q и r в M'. Значит Hq пересекает W по отрезку кривой $\gamma$, что противоречит предположению о трансверсальности орбиты Hq к W. Допустим, что элемент h нельзя соединить с единицей однопраметрической подгруппой, содержащейся в $H_p$. Тогда в силу связности $H_p$ элемент h можно представить в виде произведения $h = h_1 \cdot h_2 \cdot \ldots \cdot h_n$ элементов $h_i \in H_p$, $i = 1,\ldots,n$, каждый из которых можно соединить с единицей однопараметрической подгруппой, лежащей в $H_p$ и поэтому для любого $h \in H_p$ равенство (3) имеет место. С помощью этого нетрудно доказать, что $H_p = H_q$ и мы можем говорить о стационарной подгруппе $H_W$. Итак, произвольный элемент $h \in H$ действует на W тождественным образом. Касательное пространство к W в точке p есть $(T_pN)^{\perp}$ и ограничение метрического тензора на это подпространство невырождено. Значит, сузив при необходимости W , мы можем добиться, чтобы ограничение метрического тензора на W было невырождено в каждой точке $q \in W$ . Тогда (3) означает, что h изометрично в каждой точке $q \in W$.

Если орбиты группы H пространственноподобны, то из (3) вытекает, что группа H стационарно компактна. Тогда, как доказал Д.В. Алексеевский (см. теорему 1 из [4]), группа H несущественна (доказательство проводилось для случая римановых метрик, но нетрудно заметить, что оно сохраняет силу и для случая лоренцевых метрик). Поэтому оставшаяся часть доказательства имеет смысл только для случая, когда на всех орбитах группы H индуцируются лоренцевы метрики.

Пусть $V = \bigcup_{q \in W} H_q$ – трубчатая окрестность точки p , содержащая W . Тогда $h(V)=V$. Определим на V новую метрику $\tilde{g}$ следующим образом. Пусть $q \in W$, а $r \in Hq$ . Пусть $a \in H$ – такой элемент, что $r = aq$. Пусть $f_a(p)$ – коэффициэнт гомотетии преобразования a в точке p . Тогда положим $\tilde{g}_r = f(p) g_r$. В силу того, что всякое преобразование $h \in H_W$ изометрично, то $f_a(p)=f_b(p)$ для любого $b \in H$, такого что $r=bq$. Поэтому определение $\tilde{g}_r$ корректно. А гладкость действия H на M приводит к тому, что новая метрика тоже будет гладкой.

Пусть $\bar{T}=G/H$, а $\bar{W} \subset \bar{T}$ — множество всех классов смежности aH, таких что орбита a(Hq) пересекает W. Для любой точки $q \in M$ мы можем построить по описанному выше правилу свое множество $W_q$. Тогда соответствующие множества $\bar{W}_q$ образуют открытое покрытие пространства $\bar{T}$. Выберем из них локально конечное не более чем счетное подпокрытие $\{\bar{W}_i\}$, $i=1,2,\dots$. Построим гладкое разложение единицы $\{\bar{\omega}_i\}$, $i=1,2,\dots$ на $\bar{T}$ подчиненное этому подпокрытию. Оно естественным образом определяет разложение единицы $\{\omega_i\}$, $i=1,2,\dots$ на M.

Пусть $V_i$ – трубчатая окрестность в M, соответствующая множеству $\bar{W}_i$, $i=1,2,\dots$. Пусть $V_l$ и $V_k$ – две пересекающиеся окрестности, а $V_{lk}=V_l \cap V_k$. Пусть $\tilde{g}^l$ и $\tilde{g}^k$ – две метрики, определенные на $V_l$ и $V_k$ соответственно, согласно описанному выше правилу. Обе эти метрики конформно эквивалентны g, а значит, они эквивалентны друг другу. Их компоненты пропорциональны. Поэтому мы можем легко определить метрический тензор $\tilde{g}^{lk}$ на $V_{lk}$: $\tilde{g}^{lk}=\omega_l \tilde{g}^l+\omega_k \tilde{g}^k$.

Последнее равенство означает, что $\tilde{g}^{lk}_{ij}=\omega_l \tilde{g}^l_{ij}+\omega_k \tilde{g}^k_{ij}$, $i,j=1,\dots,n$. Метрика $\tilde{g}^{lk}$ конформно эквивалентна каждой из рассмотреных выше метрик. Поскольку группа H действует на $V_{lk}$ изометрично относительно $\tilde{g}^l$ и относительно $\tilde{g}^k$, то она действует изометрично и относительно $\tilde{g}^{lk}$.

Нетрудно доказать по индукции, что метрика $\bar{g}=\sum_{i=1}^{\infty} \omega_i \tilde{g}^i$, определенная на M, конформно эквивалентна g и группа H действует на M изометрично относительно $\bar{g}$.

## ЛИТЕРАТУРА


1. ***Подоксенов М.Н.*** Лоренцево многообразие с группой конформных преобразований, обладающей нормальной однопараметрической подгруппой гомотетий // Сиб. мат. журн., 1997. Т.38, № 6. С.1356-1359.
2. ***Barbance C.*** Transformationes conformes des varietes Lorentziennes homogenes // C.R.Acad.Sci. Ser.A., 1980. T.291, № 5. P.347-350.
3. ***Подоксенов М.Н.*** Лоренцево многообразие с группой конформных преобразований, обладающей нормальной подгруппой гомотетий // Сиб. мат. журн., 1993. Т.34, № 2. С.146-153.
4. ***Алексеевский Д.В.*** Группы конформных преобразований римановых пространств // Мат.Сб., 1972. Т.89, № 2. С. 280-296.



*S U M M A R Y*

*The paper studies varieties on which a group of conformal transformations operates.*



*Поступила в редакцию 18.02.2001*