УДК 513.814

Е.В. Коробенок, А.Ф. Орещенко

Поверхности класса [2],[2] в пространстве $^1E_4$

Двумерные поверхности в евклидовом пространстве E_4 изучали Э. Картан [1] и др.

Поверхности индефинитной метрики в пространстве Минковского $^1E_4$ могут иметь вторые основные тензоры характеристики не только [11] или [(11)] (как в E_4), но также [1 $\bar{1}$] или [2]. В последних двух случаях геометрические свойства поверхности существенно изменяются. В данной статье исследуется один специфический класс таких поверхностей в пространстве $^1E_4$. При этом используется терминология из книги [1].

1. Рассмотрим в пространстве $^1E_4$ двумерную поверхность V_2 с псевдоевклидовой касательной плоскостью. Отнесем V_2 к реперам, у которых $\vec e_1, \vec e_2 \in TV_2$, $\vec e_3, \vec e_4 \in T^{\perp}V_2$, причем $\vec e_1\vec e_2 = \vec e_3^{\,2} = \vec e_4^{\,2} = 1$,

$$\vec e_1^{\,2} = \vec e_2^{\,2} = \vec e_3\vec e_4 = 0. \qquad (1)$$

Уравнения инфинитезимального смещения такого репера и уравнения структуры:

$$d\bar A = \omega^I \vec e_I, \quad d\vec e_I = \omega_I^J \vec e_J \quad (I, J, K = 1,2,3,4) \qquad (2)$$

$$d\omega^I = \omega^J\wedge\omega^I_J, \quad d\omega^I_J = \omega^K_J\wedge\omega^I_K, \qquad (3)$$

при этом, в силу (1):

$$\omega^1_2 = \omega^2_1 = \omega^3_3 = \omega^4_4 = \omega^1_1 + \omega^2_2 = \omega^4_3 + \omega^3_4 = 0, \qquad (4)$$

$$\omega^j_a = \omega^a_j = 0 \quad (i,j = 1,2;\ a,c = 3,4).$$

В реперах первого порядка V_2 задается уравнениями:

$$\omega^a = 0, \quad \omega^a_i = b^a_{ij}\omega^j, \quad \Delta b^a_{ij}\wedge\omega^j = 0. \qquad (5)$$

Поле ненулевых нормальных векторов $\bar x = x^a \vec e_a$ порождает поле второго основного тензора ([2]):

$$Y_{ij}(\bar x) = g_{ac}x^a b^c_{ij} = x^3 b^3_{ij} + x^4 b^4_{ij} \qquad (6)$$

с характеристическим уравнением

$|Y_{ij}(\bar x) - \lambda g_{ij}| \equiv -\lambda^2 + 2Y_{12}\lambda - Y_{12}^2 + Y_{11}Y_{22} = 0$, дискриминант и корни которого:

$$\Delta(\bar x) = Y_{11}Y_{22}, \quad \rho_{1,2}(\bar x) = Y_{12} \pm \sqrt{Y_{11}Y_{22}}. \qquad (7)$$

Если $\bar x' = \nu\bar x$ $(\nu \in FV_2)$, то $\Delta(\bar x') = \nu^2\Delta(\bar x)$, $\rho_{1,2}(\bar x') = \nu\rho_{1,2}(\bar x)$. Поэтому поля $\bar x'$ и $\bar x$ порождают вторые основные тензоры одинаковой характеристики, вследствие чего можно говорить просто о характеристике данного поля нормалей.

2. Нормальные векторные поля $\bar x$, порождающие тензор $Y_{ij}(\bar x)$ кратной характеристики, ищутся, в силу (7), из уравнения: $Y_{11}(\bar x)\cdot Y_{22}(\bar x) = 0$, или, в силу (6), из уравнений:

$$b_{ii}^3 x^3 + b_{ii}^4 x^4 = 0. \qquad (8)$$

Если ранг матрицы (b_{ii}^a) равен 2, то на V_2 существует ровно 2 поля нормалей кратной характеристики.

3. Рассмотрим поверхности, на которых эти два поля нормалей ортогональны и имеют характеристику [2]. Выберем реперы, у которых $\vec e_3$ и $\vec e_4$ на-

правлены по этим нормалям (будем называть их особыми); пусть $\vec{e}_3$ соответствует $i=2$, , $\vec{e}_4$ – $i=1$ в (8). Тогда $Y_{ij}(\vec{e}_a) \equiv Y_{ij}^a = b_{ij}^a$, причем, в силу (8): $b_{22}^3 = b_{11}^4 = 0$, $b_{12}^3 = \rho_1$, $b_{12}^4 = \rho_2$.

Обозначим $b_{11}^3 = \alpha$, $b_{22}^4 = \beta$; так как тензоры Y_{ij}^a имеют характеристику [2], то $\alpha\beta \neq 0$.

Для произвольного поля $\vec{x} = x^a \vec{e}_a$: $\Delta(\vec{x}) = \alpha\beta x^3 x^4$, откуда видно, что особые нормали в каждой точке поверхности делят все остальные нормали на две пары вертикальных углов: в одной паре нормали характеристики [11], в другой – [1 $\bar{1}$]. По классификации в работе [3], это поверхности класса [2], [2].

4. Выбранные реперы допускают замену: $\vec{e}_1{}' = t\vec{e}_1$, $\vec{e}_2{}' = 1/t\,\vec{e}_2$, $t \in R$; $\vec{e}_a{}' = \vec{e}_a$. При этом $\alpha' = t^2\alpha$, $\beta' = \beta/t^2$. Значит, $\exists\, t_0 \mid \beta' = \varepsilon = \pm 1$. При $t=t_0$ получаем канонический репер. Обозначим: $\alpha'(t_0)=\gamma$ (т.к. $\alpha \neq 0$, то и $\gamma \neq 0$). Тогда в уравнениях (2):

$$\omega_1^3 = \gamma\omega^1 + \rho_1\omega^2,\ \omega_2^3 = \rho_1\omega^1,\ \omega_1^4 = \rho_2\omega^1,\ \omega_2^4 = \rho_2\omega^1 + \varepsilon\omega^2,$$
$$\omega_1^1 = q_1\omega^1 + q_2\omega^2,\ \omega_3^3 = r_1\omega^1 + r_2\omega^2.$$

С учетом (4), получаем деривационные формулы канонического репера:

$$\begin{aligned}
d\vec{A} &= \omega^1\vec{e}_1 + \omega^2\vec{e}_2,\\
d\vec{e}_1 &= (q_1\omega^1 + q_2\omega^2)\,\vec{e}_1 + (\gamma\omega^1 + \rho_1\omega^2)\,\vec{e}_3 + \rho_2\omega^2\vec{e}_4,\\
d\vec{e}_2 &= -(q_1\omega^1 + q_2\omega^2)\,\vec{e}_2 + \rho_1\omega^1\,\vec{e}_3 + (\rho_2\omega^1 + \varepsilon\omega^2)\,\vec{e}_4,\\
d\vec{e}_3 &= -\rho_1\omega^1\vec{e}_1 - (\gamma\omega^1 + \rho_1\omega^2)\,\vec{e}_2 + (r_1\omega^1 + r_2\omega^2)\,\vec{e}_4,\\
d\vec{e}_4 &= -(\rho_2\omega^1 + \varepsilon\omega^2)\,\vec{e}_1 - \rho_2\omega^2\vec{e}_2 - (r_1\omega^1 + r_2\omega^2)\,\vec{e}_3
\end{aligned} \tag{9}$$

и (в силу (3)) уравнения структуры:

$$\begin{aligned}
&d\gamma\wedge\omega^1 + d\rho_1\wedge\omega^2 + (2\gamma q_2 - \rho_2 r_1)\,\omega^1\wedge\omega^2 = 0,\\
&d\rho_1\wedge\omega^1 + (\rho_2 r_2 - \varepsilon r_1)\,\omega^1\wedge\omega^2 = 0,\\
&dq_1\wedge\omega^1 + dq_2\wedge\omega_2 + (2q_1q_2 - \rho_1^2 - \rho_2^2)\,\omega^1\wedge\omega^2 = 0,\\
&dr_1\omega^1 + dr_2\wedge\omega^2 + (r_1q_2 + r_2q_1 + \varepsilon\gamma)\,\omega^1\wedge\omega^2 = 0,\\
&d\rho_2 = (\gamma r_2 - \rho_1 r_1)\,\omega^1 + (2\varepsilon q_1 - \rho_1 r_2)\,\omega^2,\\
&d\omega^1 = q_2\omega^1\wedge\omega^2,\ d\omega^2 = q_1\omega^1\wedge\omega^2,
\end{aligned} \tag{10}$$

из которых следует, что: 1) поверхности класса [2],[2] существуют с произволом 1ф.2а.; 2) не существует поверхностей класса [2],[2], допускающих транзитивную группу лоренцевых движений (поскольку система (10) несовместна при всех постоянных инвариантах).

5. Уравнение сопряженной сети поверхности V_2:$\det(\omega_i^a) = 0$, в силу (9), принимает вид:

$$\varepsilon\gamma\rho_2\omega^{1^2} + \gamma\omega^1\omega^2 + \rho_1\omega^{2^2} = 0.$$

Эта сеть вещественная, мнимая или вырождается в семейство асимптотических соответственно, если:

$$\gamma(\gamma - 4\varepsilon\rho_1\rho_2) > 0,\ \gamma(\gamma - 4\varepsilon\rho_1\rho_2) < 0,\ \gamma = 4\varepsilon\rho_1\rho_2.$$

В последнем случае из системы (10) следует, что поверхности класса [2],[2], несущие семейство асимптотических линий, существуют с произволом 4ф.1а.

6. Линии кривизны определяются системой уравнений: $\omega^1{}_a\omega^2 - \omega^2{}_a\omega^1 = 0$, то есть, в силу (9): $\gamma\omega^{1^2} = 0$, $\varepsilon\omega^{2^2} = 0$. Так как $\gamma \neq 0$, то поверхности класса [2],[2] не имеют линий кривизны.

7. Индикатриса кривизны в точке A поверхности V_2 определяется уравнением:

$$\bar{P} = \bar{A} + (d\bar{A}^2)^{-1} \cdot b^a{}_{ij}\omega^i\omega^j\vec{e}_a,$$

то есть, в силу (9):

$$\bar{P} = \bar{A} + (\rho_1 + \tfrac{1}{2}\gamma t)\,\vec{e}_3 + (\rho_2 + \frac{\varepsilon}{2t})\,\vec{e}_4,\ t \in R.$$

Это гипербола с центром (ρ_1,ρ_2) и асимптотами, параллельными особым нормалям.

8. Вектор средней кривизны:

$$\overline{M} = \frac{1}{2} g^{ij} b^a{}_{ij} \vec{e}_a = \rho_1 \vec{e}_3 + \rho_2 \vec{e}_4 .$$

Форма кривизны $\Omega_i = \omega^a{}_i \wedge \omega_a$ имеет компоненты:

$$\Omega^1{}_1 = -\Omega^2{}_2 = (\rho^2{}_1 + \rho^2{}_2)\omega^1 \wedge \omega^2,\ \Omega^2{}_1 = 0.$$

Значит, гауссова кривизна равна $\rho^2{}_1 + \rho^2{}_2$ (с точностью до знака).

Форма кручения $\Omega^c{}_a = \omega^i{}_a \wedge \omega^c{}_i$ имеет существенную компоненту $\gamma\omega^1 \wedge \omega^2$. Значит, гауссово кручение равно γ.

9. Будем искать эволютную поверхность для V_2, т.е., огибающую нормальных плоскостей поверхности V_2 [4]. Для текущей точки $\overline{C}$ эволютной поверхности имеем: $\overline{C} = \overline{A} + h^a \vec{e}_a$, $d\overline{C} = \Omega^a \vec{e}_a$ для любых ω^i, откуда: $\omega^i + h^a \omega^i{}_a = 0$, $\Omega^a = dh^a + h^b \omega^a{}_b$, или, в силу (9): $1 - \rho_1 h^3 - \rho_2 h^4 = 0$, $h^3 = h^4 = 0$. Так как эта система несовместна, то поверхности класса [2],[2] не имеют эволютных поверхностей.

10. Фокальная кривая определяется как множество точек пересечения нормальной плоскости в данной точке поверхности со всеми бесконечно близкими к ней нормальными плоскостями. Ее можно получить как пересечение четырех гиперплоскостей: $x^1 = 0$, $x^2 = 0$, $dx^1 = 0$, $dx^2 = 0$ (при всех d). В силу (9) с учетом равенств: $dx^J = \omega^J + \omega^J{}_K x^K$, получим систему:

$$\gamma x^3 \omega^1 + (\rho_1 x^3 + \rho_2 x^4 - 1)\,\omega^2 = 0,$$

$$(\rho_1 x^3 + \rho_2 x^4 - 1)\omega^1 + \varepsilon x^4 \omega^2 = 0, \qquad x^1 = x^2 = 0,$$

откуда, исключая ω^1, ω^2, находим уравнения фокальной кривой:

$$(\rho_1 x3 + \rho_2 x^4 - 1)^2 - \varepsilon\gamma x^3 x^4 = x^1 = x^2 = 0,$$

то есть,

$$\rho^2{}_1 x^{3^2} + (2\rho_1\rho_2 - \varepsilon\gamma)\, x^3 x^4 + \rho^2{}_2 x^{4^2} - 2\rho_1 x^3 - 2\rho_2 x^4 + 1 = x^1 = x^2 = 0.$$

Так как ортогональный инвариант

$$\delta = \frac{1}{4}\gamma(4\varepsilon\rho_1\rho_2 - \gamma),$$

то отсюда и из п.5 следует

Теорема. *Фокальная кривая поверхности является эллипсом, гиперболой или параболой тогда и только тогда, когда сопряженная сеть поверхности является соответственно мнимой, вещественной или вырождающейся в семейство асимптотических.*

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Картан Э.*** Риманова геометрия в ортогональном репере. М., 1960. С. 250-260.
2. ***Громол Д., Клингенберг В., Мейер В.*** Риманова геометрия в целом. М., 1971. С. 124.
3. ***Коробенок Е.В., Орещенко А.Ф.*** Классификация двумерных многообразований индефинитной метрики в псевдоевклидовом пространстве ${}^1E_4$. Известия АН БССР, серия ф.-м.н., 1971, № 5. С. 67.
4. ***Кривоносов Л.Н.*** Поверхности в E_4, порождающие эволютную последовательность поверхностей. Известия вузов, Математика, 1966, № 6. С. 35.

SUMMARY

In four dimensional Minkowskian space two dimensional surfaces with indefinite metric carrying two orthogonal normal vector fields generating second fundamental tensors of caracteristic [2] are investigated.

Поступила в редакцию 10.09.2001