ЛИТЕРАТУРА

1. **Шеметков Л.А.** О конечных разрешимых группах // Известия АН СССР, сер. матем, 1968. Т. 32, № 3. С.533-559.
2. **Поляков Л.Я.** О влиянии свойств максимальных подгрупп на разрешимость конечной группы // Конечные группы. Минск, 1966. С. 89-97.
3. **Монахов В.С., Селькин М.В., Грибовская Е.Е.** О разрешимых нормальных подгруппах конечных групп // Укр. мат. журн., 2002. Т. 54, № 7. С.940-950.
4. **Huppert B.** Endliche Gruppen I. Berlin, Heidelberg, New York, 1967. – 792 s.
5. **Шеметков Л.А.** Формации конечных групп. М., 1978. – 272 с.
6. **Монахов В.С.** О подгруппах Шмидта конечных групп // Вопросы алгебры. Вып. 13. Гомель, 1998. С.153-171.
7. **Грибовская М.А.** Группы нечетного порядка с ограниченными индексами максимальных подгрупп // Известия Гомельского госуниверситета, 2002, № 5(14). Вопросы алгебры – 18. С. 80-84.

SUMMARY

In this paper the normal subgroups K of the finite group G with limited indices of maximal subgroups is described. It is proved that subgroups K soluble and $n(K) \le 5$, $l_r(K) \le 1$ for $r > 3$, $l_2(K)$ and $l_3(K) \le 2$.

Поступила в редакцию 14.09.2002

УДК 539.3 : 534.1

Г.И. Михасев

О потере устойчивости безмоментного напряженного состояния многослойных конических оболочек

Рассмотрим некруговую коническую оболочку, состоящую из N изотропных слоев. Пусть h_k, E_k, ν_k –толщина, модуль Юнга и коэффициент Пуассона k -го слоя (k = 1, ..., N). В качестве исходной поверхности примем срединную поверхность одного из k-ых слоев. На исходной поверхности введем ортогональную систему криволинейных координат s, φ, где $s = R^{-1}s^*$, s^* – расстояние до вершины конуса, R– характерный размер срединной поверхности, φ – координата на направляющей, выбираемая таким образом, чтобы первая квадратичная форма поверхности имела вид $d\sigma^2 = R^2(ds^2 + s^2 d\varphi^2)$, а радиус кривизны $R_2 = Rs\rho^{-1}(\varphi)$. Пусть оболочка занимает область Ω:

$$s_1(\varphi) \le s \le s_2(\varphi), 0 \le \varphi \le \varphi_1, \qquad (1)$$

где φ_1 – длина кривой, образующейся при пересечении исходной конической поверхности и сферы единичного радиуса с центром в вершине конуса.

Для формулировки используемых здесь гипотез теории многослойных оболочек введем дополнительные обозначения. Пусть **n** – вектор нормали к исходной поверхности, направленный в сторону ее выпуклости, $\mathbf{e}_i$ (i =1, 2) – вектора, касательные к линиям кривизн исходной поверхности, z – поперечная координата, отсчитываемая в направлении вектора **n**, δ_k – расстояние между исходной конической поверхностью и верхним краем k-го слоя, $\tilde{u}_i, \tilde{w}$ – тангенциальные и нормальное перемещения точек исходной поверхности, соответственно, $\tilde{u}_i^{(k)}$ – тангенциальные перемещения точек k -го слоя, σ_{i3} – поперечные касательные напряжения, $\Theta_i^{(1)}$ – углы поворота нормали **n** вокруг векторов **e**$_i$.

В качестве исходных примем следующие гипотезы [1].

1. Поперечные касательные напряжения изменяются по толщине k-го слоя оболочки по заданному закону:

$$\sigma_{i3} = f_0(z)\mu_i^{(0)}(s,\varphi) + f_k(z)\mu_i^{(k)}(s,\varphi), \tag{2}$$

где $f_0(z), f_k(z)$ – непрерывные функции такие, что

$$f_0(\delta_0) = f_0(\delta_N) = 0, \;\; f_k(\delta_{k-1}) = f_k(\delta_k) = 0, \tag{3}$$
$$f_k(z) = 0 \quad \text{при} \quad z \notin [\delta_{k-1}, \delta_k].$$

2. Нормальные напряжения, действующие на площадках, параллельных исходной поверхности, пренебрежимо малы по сравнению с другими компонентами тензора напряжений.

3. Прогиб $\tilde{w}$ не зависит от поперечной координаты z.

4. Тангенциальные перемещения распределены по толщине пакета согласно обобщенной кинематической гипотезе Тимошенко:

$$\tilde{u}_i^{(k)}(s,\varphi,z) = \tilde{u}_i(s,\varphi) + z\Theta_i^{(1)}(s,\varphi) + g(z)\Theta_i^{(2)}(s,\varphi), \tag{4}$$

где $g(z) = \int\limits_0^z f_0(x)dx$. Функции $\mu_i^{(0)}$, $\mu_i^{(k)}$ характеризуют податливость k-го слоя к поперечным сдвигам [1]. Соотношение (4) позволяет учесть нелинейную зависимость тангенциальных перемещений от координаты z. При $g \equiv 0$ получаем классическую гипотезу Тимошенко.

Принятые гипотезы в общем случае приводят к довольно громоздкой системе двенадцати дифференциальных уравнений относительно двенадцати неизвестных [1, с. 45]. Однако в предположении о большой изменяемости решений эта система может быть сведена к системе уравнений [1, 2], которую мы запишем в безразмерном виде

$$\begin{gathered}\varepsilon^4(1-\varepsilon^3\tau\Delta)\Delta^2\chi - \Delta_\rho F + \varepsilon^2\Lambda\Delta_T(1-\varepsilon^2\kappa\Delta)\chi = 0, \\ \varepsilon^4\Delta^2 F + \Delta_\rho(1-\varepsilon^2\kappa\Delta)\chi = 0, \quad w = (1-\varepsilon^2\kappa\Delta)\chi,\end{gathered} \tag{5}$$

где

$$\Delta = \frac{1}{s^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\left(s\frac{\partial}{\partial s}\right), \quad \Delta_\rho = \frac{\rho(\varphi)}{s}\frac{\partial^2}{\partial s^2},$$

$$\Delta_T w = \frac{1}{s}\left[\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(T_2\frac{\partial w}{\partial\varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial s}\left(T_3\frac{\partial w}{\partial\varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(T_3\frac{\partial w}{\partial s}\right) + \frac{\partial}{\partial s}\left(sT_1\frac{\partial w}{\partial s}\right)\right],$$

$$\left(T_1^*, T_2^*, S^*\right) = -\Lambda\varepsilon^6 Eh\left(T_1, T_2, T_3\right), \quad \varepsilon^8 = \frac{\eta_3 h^2}{12\left(1-\nu^2\right)R^2},$$

$$\chi^* = R\chi, \quad w^* = RwF^* = \varepsilon^4 EhR^2 F,$$

$$h=\sum_{k=1}^{N}h_k,\quad \nu=\sum_{k=1}^{N}\frac{E_k h_k \nu_k}{1-\nu_k^2}\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{E_k h_k}{1-\nu_k^2}\right)^{-1},\quad E=\frac{1-\nu^2}{h}\sum_{k=1}^{N}\frac{E_k h_k}{1-\nu_k^2}.$$

Здесь w^*– нормальное перемещение точек исходной поверхности, χ^*, F^* – функции перемещений и напряжений соответственно, ε – естественный малый параметр, T_1^*, T_2^*, S^* – тангенциальные усилия в исходной поверхности, характеризующие безмоментное докритическое состояние, Λ – искомый параметр нагружения, h – толщина оболочки, E,ν – осредненные модуль Юнга и коэффициент Пуассона оболочки. Параметры κ,τ, входящие в уравнения (5), учитывают осредненные эффекты поперечных сдвигов и вводятся по формулам [2]

$$K/\pi^2=\varepsilon^2\kappa,\quad K\theta/\pi^2=\varepsilon^3\tau,\quad \kappa,\tau\sim 1 \text{ при } \varepsilon\to 0, \tag{6}$$

где [1]

$$K=\pi^2 h^2/\left(bR^2\right),\quad \theta=1-\frac{\eta_2^3}{\eta_1\eta_3},\quad b=\frac{12\left(1-\nu^2\right)q_{44}}{Eh\eta_1},$$

$$\eta_1=\sum_{k=1}^{N}\varsigma_k^{-1}\pi_{1k}\gamma_k-3c_{12}^2,\quad \eta_2=\sum_{k=1}^{N}\varsigma_k^{-1}\pi_{2k}\gamma_k-3c_{13}c_{12},$$

$$\eta_3=4\sum_{k=1}^{N}\left(\varsigma_k^2+3\zeta_{k-1}\varsigma_k\right)\gamma_k-3c_{13}^2,\quad \gamma_k=\frac{E_k h_k}{1-\nu_k^2}\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{E_k h_k}{1-\nu_k^2}\right)^{-1},$$

$$c_{12}=\sum_{k=1}^{N}\varsigma_k^{-1}\pi_{3k}\gamma_k,\quad c_{13}=\sum_{k=1}^{N}\left(\zeta_{k-1}+\zeta_k\right)\gamma_k,\quad G_k=\frac{E_k}{2\left(1+\nu_k\right)},$$

$$q_{44}=\frac{\left[\sum_{k=1}^{N}\left(\lambda_k-\frac{\lambda_{k0}^2}{\lambda_{kk}}\right)\right]^2}{\sum_{k=1}^{N}\left(\lambda_k-\frac{\lambda_{k0}^2}{\lambda_{kk}}\right)G_k^{-1}}+\sum_{k=1}^{N}\frac{\lambda_{k0}^2}{\lambda_{kk}}G_k,\quad \lambda_k=\int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k}f_0^2(z)dz,\quad \lambda_{kn}=\int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k}f_k(z)f_n(z)dz,$$

$$\frac{1}{12}h^3\pi_{1k}=\int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k}g^2(z)dz,\quad \frac{1}{12}h^3\pi_{2k}=\int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k}zg(z)dz,\quad \frac{1}{2}h^2\pi_{3k}=\int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k}g(z)dz,$$

$$h\varsigma_k=h_k,\quad h\zeta_n=\delta_n\quad (n=0,k).$$

Предположение (6) справедливо для тонких оболочек в случае, когда физические свойства слоев различаются незначительно.

На краях $s=s_i(\varphi)$ рассмотрим условия свободного опирания [1]:

$$F=\Delta F=\chi=\Delta\chi=\Delta\Delta\chi=0 \quad \text{при} \quad s=s_i(\varphi). \tag{7}$$

Уравнения (5), описывающие бифуркацию безмоментного напряженного состояния слоистой оболочки, учитывают эффекты поперечных сдвигов. Полагая в (5) $\kappa=\tau=0$, получаем хорошо известные уравнения Кармана для изотропной однослойной оболочки.

Задача состоит в определении наименьшего положительного Λ, для которого краевая задача (5), (7) имеет нетривиальное решение.

Напряженно-деформированное состояние оболочки, как известно [3], состоит из основного напряженного состояния и интегралов краевого эффекта. В дальнейшем ограничимся рассмотрением лишь основного напряженного состояния. Для его построения с точностью до величин порядка ε^2 следует удовлетворить лишь двум условиям

$$F = \chi = 0 \quad \text{при} \quad s = s_i(\varphi). \tag{8}$$

Пусть $T_1, T_2, T_3 = O(1)$ и $T_2(s,\varphi) > 0$ хотя бы на части области Ω. Тогда [4] $\Lambda \sim 1$ и потеря устойчивости происходит по форме, при которой вмятины вытянуты в направлении образующих. Будем также предполагать, что потеря устойчивости охватывает не всю поверхность, а локализуется в окрестности некоторой образующей $\varphi = \varphi_0$, называемой наиболее слабой.

Следуя [4], решение системы (5) ищем в виде

$$\chi(s,\varphi,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} \chi_j(\xi,s) \exp\left[i\left(\varepsilon^{-1/2} q\xi + \frac{1}{2} a\xi^2\right)\right], \tag{9}$$

$$\xi = \varepsilon^{-1/2}(\varphi - \varphi_0), \quad \Lambda = \Lambda_0 + \varepsilon\Lambda_1 + \varepsilon^2\Lambda_2 + \ldots, \quad \operatorname{Im} a > 0, \tag{10}$$

где $\chi_j(\xi,s)$ – полиномы по ξ. Функция F ищется в том же виде (9). Последнее неравенство в (10) гарантирует затухание амплитуды вмятин при удалении от образующей $\varphi = \varphi_0$. Все функции, зависящие от координаты φ и входящие в уравнения (5) и граничные условиям (8), раскладываются в окрестности образующей $\varphi = \varphi_0$ в ряды по степеням $\xi^{1/2}$.

Подстановка (9), (10) в уравнения (5) и граничные условия (8) порождает последовательность дифференциальных уравнений

$$\sum_{l=0}^{j} \mathbf{H}_l \chi_{j-l} = 0, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, \tag{11}$$

а также последовательность соответствующих граничных условий

$$\sum_{l=0}^{j} \mathbf{\Gamma}_l^{\upsilon} \chi_{j-l} = 0, \quad \upsilon = 0, 1, \quad j = 0, 1, 2, \ldots \quad \text{при} \quad s = s_j(\varphi_0). \tag{12}$$

Здесь

$$\mathbf{H}_0\chi_0 \equiv \frac{\rho^2}{q^4}\frac{\partial^2}{\partial s^2}\left[s^3\left(1 + \frac{\kappa q^2}{s^2}\right)\frac{\partial^2 \chi_0}{\partial s^2}\right] + \frac{q^4}{s^3}\chi_0 - \Lambda_0\frac{q^2}{s}T_2(s,\varphi_0)\left(1 + \frac{\kappa q^2}{s^2}\right)\chi_0 = 0, \tag{13}$$

$$\mathbf{\Gamma}_0^0\chi_0 \equiv \chi_0 = 0, \quad \mathbf{\Gamma}_0^1\chi_0 \equiv \frac{\partial^2\chi_0}{\partial s^2} = 0, \quad \text{при} \quad s = s_j(\varphi_0), \tag{14}$$

а операторы $\mathbf{H}_l, \mathbf{\Gamma}_l^{\upsilon}$ при $l > 1$ приведены в [4].

В частном случае, при $\kappa = 0$, уравнение нулевого приближения (13) переходит в уравнение для изотропной оболочки, изученное в работах [4, 5]. Процедура отыскания неизвестных параметров и функций в разложениях (9), (10), изложенная в книге [4] для изотропных оболочек, остается справедливой и для слоистых композитных оболочек.

Рассмотрев нулевое приближение (13), (14), находим

$$\Delta_0^o = \min_{q,\varphi_0}\{\Lambda_0(q,\varphi_0)\} = \Lambda_0(q^o, \varphi_0^o), \tag{15}$$

где параметры q^o, φ_0^o определяются из соотношений

$$\partial\Lambda_0/\partial q = \partial\Lambda_0/\partial\varphi_0 = 0. \qquad (16)$$

Далее предполагаем, что

$$d^2\Lambda_0 = \Lambda_{qq}dq^2 + 2\Lambda_{q\varphi_0}dqd\varphi_0 + \Lambda_{\varphi_0\varphi_0}d\varphi_0^2 > 0, \qquad (17)$$

где через $\Lambda_{qq}, \Lambda_{q\varphi_0}, \Lambda_{\varphi_0\varphi_0}$ обозначены производные Λ_0 при $q = q^o, \varphi_0 = \varphi_0^o$. В первом и втором приближениях (j=1, 2) имеем неоднородные краевые задачи. Из условия существования решений последних находим [4]:

$$\chi_0(\xi, s) = P_n(\xi)\chi_0^o(s), \qquad (18)$$

$$a^2\Lambda_{qq} + 2a\Lambda_{q\varphi_0} + \Lambda_{\varphi_0\varphi_0} = 0, \qquad (19)$$

$$b = -i\left(a\Lambda_{qq} + \Lambda_{q\varphi_0}\right), \qquad (20)$$

$$\Lambda_1 = \Lambda_1^{(n)} = b\left(n + \tfrac{1}{2}\right) + \eta, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (21)$$

где $P_n(\xi)$ – полином Эрмита степени n, $\chi_0^o(s)$ – собственная функция задачи (13), (14) при условии (16), а формула для вычисления параметра η приведена в книге [4, с. 139]. Наибольший интерес представляет случай, когда n=0. Здесь $P_0 \equiv 1$, а параметр $\Lambda_1^{(0)} = \tfrac{1}{2}n + \eta$ является наименьшим.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Григолюк Э.И., Куликов Г.М.*** Многослойные армированные оболочки: Расчет пневматических шин. М., 1988. – 288 с.
2. ***Mikhasev G., Seeger F., Gabbert U.*** Local Buckling of Composit Laminated Cylindrical Shells with Oblique Edges under External Pressure: Asymptotic and Finite Element Simulations // Technische Mechanik, 2001, Band 21, Heft 1. P. 1–12.
3. ***Гольденвейзер А.Л.*** Теория упругих тонких оболочек. М., 1953. –544 с.
4. ***Товстик П.Е.*** Устойчивость тонких оболочек. М., 1995. – 320 с.
5. ***Михасев Г.И., Товстик П.Е.*** Устойчивость конических оболочек под действием внешнего давления // Известия АН СССР. МТТ, 1990, № 4. С. 99–104.

SUMMARY

The problem on buckling of thin composite laminated non-circular conical shell consisting of N isotropic layers is considered. Using the complex WKB–method, the two-dimensional boundary-value problem is reduced to the sequence of one-dimensional boundary-value problems. The formula for calculation of the critical parameter of loading has been found.

Поступила в редакцию 5.12.2002