

О конечных разрешимых группах с копростым автоморфизмом

Цель этой работы состоит в том, чтобы ослабить условие теоремы 5 из работы [1] и доказать, что ее заключение остается справедливым, если у-инвариантную силовскую p -подгруппу заменить произвольной у-инвариантной p -подгруппой.

Отметим, что здесь используются стандартные обозначения и терминология, которые можно найти в источниках [1-4].

Следует также отметить, что фигурирующая в [1] группа типа $(2, p, k, c)$ имеет порядок $2^{2k+1}p^{2c}$, если ее экстраспециальная силовская 2-подгруппа T неизоморфна Q_8 . Именно в этом случае T имеет нормальную элементарную абелеву подгруппу E порядка 4, существование которой используется в последнем абзаце доказательства теоремы 5 из [1].

Для удобства дадим следующее определение.

Определение. Пусть H – конечная группа, обладающая свойствами:

- 1) $|H| = 2^{2k+1}p^c$, $p \neq 2$, $Z(H) = \Phi(H) = 1$;
- 2) S_p -подгруппа P из H нормальна и самоцентрализуема в H ;
- 3) S_2 -подгруппа T из H является экстраспециальной с $C_H(T) = Z(T)$; если подгруппа T неизоморфна Q_8 , то c – четно.

Тогда назовем H группой типа $(p, 2, k, c)$. ♦

Если конечная группа X допускает автоморфизм u простого порядка r , $(|X|, r) = 1$, $C = C_X(y)$, а A и B – у-инвариантные подгруппы из X , причем $A \triangleleft B$, то $B/A = B^*$ назовем у-инвариантной секцией группы X .

Будем говорить, что группа X имеет у-инвариантную секцию H^* типа $(p, 2, k, c)$, если выполняются следующие условия:

- (I) H^* – группа типа $(p, 2, k, c)$;
- (II) в группе $H^* \lambda \langle u \rangle$ ее S_p -подгруппа P^* является минимальной нормальной подгруппой;
- (III) $Z(T^*)$ есть наибольшая собственная у-инвариантная подгруппа в S_2 -подгруппе T^* из H^* ;
- (IV) $|C_{H^*}(y)| = |Z(T^*)| = 2$, $r = 2^{k+1}$.

Используемые ниже свойства у-инвариантных групп хорошо известны и собраны в теореме 1 из [2].

Теорема. Пусть X – конечная разрешимая группа, допускающая автоморфизм u простого порядка r , $(|X|, r) = 1$, $C = C_X(y)$. Пусть $1 \neq P$ есть у-инвариантная p -подгруппа из X и $C \subseteq N_X([P, u])$. Пусть также выполняется одно из следующих условий:

- (I) $p > 2$;
- (II) $p = 2$, но 2 не делит $|C|$;
- (III) $p = 2$, 2 делит $|C|$, но X не имеет у-инвариантных секций типа $(p, 2, k, c)$.

Тогда $[P, u] \triangleleft\triangleleft X$.

Доказательство. Пусть X – контрпример минимального порядка. Предположим, что X не имеет у-инвариантных секций типа $(p, 2, k, c)$.

Предположим, что существуют различные простые делители q и s числа $|X|$, отличные от p . Тогда в X существуют y -инвариантные холловские q' - и s' -подгруппы A и B (см. теорему 1 из [2]). Ясно, что $AB = X$, а $|X_p|$ делит $A \cap B$. Из теоремы 1(3) из [2] известно, что P можно выбрать так, что $P \subseteq A \cap B$. Применение индукции к A и B дает нам, что $[P, y] \triangleleft\triangleleft A$ и $[P, y] \triangleleft\triangleleft B$. Тогда из известной теоремы Виландта следует, что $[P, y] \triangleleft\triangleleft X$.

Поэтому впредь можно считать, что только $q \neq p$ делит $|X|$, $X = P_0Q$, где P_0 и Q есть y -инвариантные силовские p - и q -подгруппы, причем можно считать, что $P \subseteq P_0$.

Предположим, что $O_p(X) = T \neq 1$. Тогда группа $X^* = X/T$ удовлетворяет условиям теоремы (см. теорему 1 из [2]). Применение индукции к X^* дает нам, что $[P^*, y] \triangleleft\triangleleft X^*$. Так как $[P^*, y]$ есть p -группа, то определение группы $O_p(X) = T$ дает нам, что $[P^*, y] = 1$, то есть $[P, y] \subseteq T$ и все доказано.

Поэтому впредь можно считать, что $O_p(X) = 1$. Из разрешимости группы X тогда следует, что $O_q(X) = N \neq 1$. Группа $X^{**} = X/N$ удовлетворяет условиям теоремы (см. теорему 1 из [2]). Применение индукции к X^{**} дает нам, что $[P, y]N/N \triangleleft\triangleleft X/N$. Тогда $[P, y]N \triangleleft\triangleleft X$. Предположим, что $[P, y]N \subset X$. Так как $[P, y]N$ является y -инвариантной подгруппой в X , то по индукционному заключению $[P, y] \triangleleft\triangleleft [P, y]N \triangleleft\triangleleft X$ и все доказано. Поэтому $[P, y]N = X$. Но тогда $[P, y]$ – есть силовская p -подгруппа в X . Теперь утверждение следует из теоремы 5 в [1].

Теорема полностью доказана.

В заключение выражаю признательность своему научному руководителю профессору Пальчику Э.М. за постоянное внимание к моей работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пальчик Э.М., Гарист Ю.Э. О конечных группах, допускающих автоморфизм простого порядка. // Вопросы алгебры. Гомель, 1996. Вып. 9. С. 75-82.
2. Шмидт А.М. О конечных группах с копровой автоморфизмом, стабилизатор которого имеет нормальную абелеву 2-подгруппу // Весник Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта, 2001, №1. С. 69-71.
3. Гарист Ю.Э., Пальчик Э.М. О конечных группах, допускающих копровой автоморфизм // Вопросы алгебры. Гомель, 1997. Вып. 11. С. 20-26.
4. Huppert B. Endliche Gruppen, I. Berlin: Springer-Verlag. 1967. – 793 S.

S U M M A R Y

In the papers is proved the following theorem:

Let X be a finite solvable group admitting automorphism y of order r , $(|X|, r) = 1$, $C = C_X(y)$. Let $1 \neq P$ is y -invariant p -subgroup of X and $C \subseteq N_X([P, y])$. Let one of the following holds:

(I) $p > 2$;

(II) $p = 2$, but 2 not divided $|C|$;

(III) $p = 2$, but 2 divided $|C|$, but X has not y -invariant section type $(p, 2, k, c)$.

Then $[P, y] \triangleleft\triangleleft X$.

Поступила в редакцию 9.01.2002