Поэтому решетка $\mathfrak{F}_1 \vee \mathfrak{M}/\mathfrak{F}_1$ содержит лишь два элемента. Значит, $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}_1$ – максимальный τ-подкласс Шунка в $\mathfrak{M}$. Следовательно, $\Phi_\tau(\mathfrak{M}) \subseteq \mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}_1$ и поэтому $\Phi_\tau(\mathfrak{M}) \subseteq \mathfrak{F}_1$. Противоречие. Итак, $\Phi_\tau(\mathfrak{M}) \subseteq \Phi_\tau(\mathfrak{F})$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Русаков С.А.*** Алгебраические n-арные системы. Мн., 1992. – 264 с.
2. ***Селькин М.В.*** Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп. Мн., 1997. – 144 с.
3. ***Скиба А.Н.*** Алгебра формаций. Мн., 1997. – 240 с.
4. ***Селькин М.В., Скиба А.Н.*** О решетках τ-классов Шунка // Доклады национальной академии наук Беларуси, 2001, том 45, №3. С. 51-53.
5. ***Аль-Дабабсех А.Ф.*** Решетки формаций и классов Шунка n-арных групп // Препринт, Гомельский госуниверситет, 1999, №87. – 17 с.
6. ***Биркгоф Г.*** Теория решеток. М., 1984. – 568 с.
7. ***Ефремова М.И.*** О дистрибутивности решетки τ-классов Шунка конечных n-арных групп // Вопросы алгебры. Гомель, 2001, Вып. 18. С. 182-186.

SUMMARY

The cross of maximal Schunck τ-subclasses of n-ary groups is described with the help of the classes theory and General Lattice Theory. Besides, the infimum for the set of all coatoms of the lattice of all Schunck τ-subclasses of an arbitrary Schunck τ-class is described. All obtained in the article results have a theoretical character and are able to use in studying classes of finite n-ary groups.

Поступила в редакцию 1.11.2001

УДК 518:517.948

Ю.В. Трубников

Об одном новом алгоритме нахождения спектральных радиусов

Предлагается алгоритм вычисления спектрального радиуса ρ матрицы с комплексными элементами, основанный на построении алгебраического уравнения, одним из корней которого является ρ^2.

Рассмотрим произвольную [n x n] – матрицу A с комплексными элементами $a_{ij}(i, j = 1,2,\dots,n)$. Пусть

$$P(z) \equiv z^n + a_1 e^{i\varphi_1} z^{n-1} + \dots + a_{n-1} e^{i\varphi_{n-1}} + a_n e^{i\varphi_n} = 0 \qquad (1)$$

– характеристическое уравнение матрицы A с комплексными коэффициентами, модули которых $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Напомним [1], что совокупность всех собственных значений $\lambda \in C$ (C – множество комплексных чисел) называется спектром матрицы A и обозначается $\sigma(A)$. Неотрицательное вещественное число

$$\rho \equiv \rho(A) \equiv \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$$

называется спектральным радиусом матрицы *A*. Спектральный радиус совпадает с радиусом наименьшего круга с центром в начале координат на комплексной плоскости, который содержит все собственные значения матрицы A.

Пусть $s_k = \lambda_1^k + \lambda_2^k + \ldots + \lambda_n^k$, $k=1,2,\ldots$

– степенные суммы, выражающиеся при помощи формул Ньютона через элементарные симметрические многочлены $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ [2]. Обозначим корень уравнения (1) с максимальным модулем λ_n. При этом допускается любая кратность этого корня и наличие других корней с таким же модулем ρ.

Обозначим через $\overline{A}$ матрицу с элементами $\overline{a_{ij}}$, где $\overline{a}$ – число, комплексно сопряженное числу a.

Теорема. Число ρ^2 *является корнем уравнения*

$$\det\left(A \otimes \overline{A} - \lambda E_{n^2}\right) = 0, \tag{2}$$

где $A \otimes \overline{A}$ *– прямое (тензорное) произведение матриц* A *и* $\overline{A}$. *Кроме того, степенные суммы* s_k^*, *построенные по системе корней уравнения* (2), *связаны со степенными суммами* s_k *для корней уравнения* (1) *равенством*

$$s_k^* = |s_k|^2 \ (k = 1,2,\ldots). \tag{3}$$

Доказательство. Как известно [3], собственные значения матрицы $A \otimes B$ совпадают с всевозможными произведениями

$$\lambda\mu \ (\lambda \in \sigma(A), \ \mu \in \sigma(B)).$$

В нашем случае уравнение (2) в качестве своих корней имеет корни

$$\lambda_1 \overline{\lambda}_1, \lambda_1 \overline{\lambda}_2, \ldots, \lambda_{n-1} \overline{\lambda}_n, \lambda_n \overline{\lambda}_n.$$

Среди этих произведений имеется $\rho^2 = \lambda_n \overline{\lambda}_n = |\lambda_n|^2$.

Обозначим через s_k^* степенные суммы корней многочлена Q(z), расположенного в левой части уравнения (2), тогда

$$s_1^* = \lambda_1\overline{\lambda_1} + \lambda_1\overline{\lambda_2} + \ldots + \lambda_n\overline{\lambda_n} = (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n)\left(\overline{\lambda_1} + \overline{\lambda_2} + \ldots + \overline{\lambda_n}\right) = s_1\overline{s_1} = |s_1|^2.$$

Аналогично,

$$s_k^* = \lambda_1^k \overline{\lambda_1}^k + \lambda_1^k \overline{\lambda_2}^k + \ldots + \lambda_n^k \overline{\lambda_n}^k = (\lambda_1^k + \lambda_2^k + \ldots + \lambda_n^k)\left(\overline{\lambda_1}^k + \overline{\lambda_2}^k + \ldots + \overline{\lambda_n}^k\right) = |s_k|^2,$$

где s_k – степенные суммы, построенные по корням многочлена (1). Так как степенные суммы $s_k (k = 1,2,\ldots)$ выражаются явным образом через коэффициенты многочлена P(z), то и s_k^* выражаются через коэффициенты P(z).

Пусть σ_k^* – элементарные симметрические многочлены, построенные по корням Q(z), тогда учитывая формулы

$$\begin{gathered}\sigma_1^* = s_1^*,\ \sigma_2^* = \frac{1}{2}\left(s_1^{*2} - s_2^*\right) \sigma_3^* = \frac{1}{6}\left(s_1^{*3} - 3s_1^*s_2^* + 2s_3^*\right) \\ \sigma_4^* = \frac{1}{24}\left(s_1^{*4} - 6s_1^{*2}s_2^* + 3s_2^{*2} + 8s_1^*s_3^* - 6s_4^*\right) \quad \text{и т. д.,}\end{gathered} \tag{4}$$

получаем возможность представить коэффициенты многочлена Q(z) через коэффициенты многочлена P(z).

Теорема доказана.

Однако прямое вычисление $\det\left(A \otimes \overline{A} - \lambda E_{n^2}\right)$ связано с громоздкими преобразованиями. В данной работе предлагается алгоритм нахождения коэффициентов алгебраического уравнения (2), основанный на равенстве (3). Алгоритм состоит из следующих шагов:

1) находим степенные суммы $s_k\left(k = 1,2,\ldots,n^2\right)$;

2) пользуясь равенством (3), находим степенные суммы $s_k^*\left(k = 1,2,\ldots,n^2\right)$;

3) зная степенные суммы s_k^*, по формулам (4) проводим вычисление коэффициентов уравнения (2);

4) далее находить значение ρ^2 можно приближенно итерационным методом Ньютона (заметим, что информация о степенных суммах дает возможность осуществить локализацию числа ρ^2).

Например, при n = 2 многочлен Q(z) имеет вид

$$Q(z) = z^4 - a_1^2 z^3 + 2[a_1^2 a_2 \cos(2\varphi_1 - \varphi_2) - a_1^2]z^2 - a_1^2 a_2^2 z + a_2^4.$$

Приведем пример: многочлен

$$z^2 - \left(\sqrt{3} + 1\right)(1 + i)z + 4i$$

имеет корни $z_1 = \sqrt{3} + i$, $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$, т.е. $|z_1| = |z_2| = 2$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что Q(4) = 0.

В процессе применения данного алгоритма встречаются две трудности: получить удобные формулы для вычисления $|s_k|$; вторая трудность – по формулам Ньютона (4) найти коэффициенты многочлена Q(z). Корень ρ^2 многочлена Q(z) после хорошей локализации можно находить методом Ньютона. Приведем несколько формул для нахождения $|s_k|$; при n = 3 получаем

$$|s_1|^2 = a_1^2, \quad |s_2|^2 = a_1^4 + 4a_2^2 - 4a_1^2 a_2 \cos(2\varphi_1 - \varphi_2),$$

$$|s_3|^2 = a_1^6 + 9a_1^2 a_2^2 + 9a_3^2 - 6a_1^4 a_2 \cos(2\varphi_1 - \varphi_2) +$$

$$+ 6a_1^3 a_3 \cos(3\varphi_1 - \varphi_3) - 18a_1 a_2 a_3 \cos(\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3),$$

и т.д. Таким образом, при n = 3 уравнение (2) является уравнением девятой степени $\lambda^9 + b_1\lambda^8 + \ldots + b_8\lambda + b_9 = 0$, где

$$b_1 = -a_1^2, \; b_2 = 2a_1^2 a_2 \cos(2\varphi_1 - \varphi_2) - 2a_2^2,$$

$$b_3 = 6a_1 a_2 a_3 \cos(\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3) - a_1^2 a_2^2 - 3a_3^2 - 2a_1^3 a_3 \cos(3\varphi_1 - \varphi_3),$$

$$b_4 = a_2^4 - a_1^2 a_3^2 + 2a_1^3 a_2 a_3 \cos(\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3) - 4a_1 a_2^2 a_3 \cos(\varphi_1 - 2\varphi_2 + \varphi_3),$$

и т.д.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Хорн Р., Джонсон Ч.*** Матричный анализ. М., 1989. С. 50.
2. ***Курош А.Г.*** Курс высшей алгебры. М., 1971. С. 331.
3. ***Ланкастер П.*** Теория матриц. М., 1978. С. 238 с.

S U M M A R Y

The new method of the finding of matrix spectral radius is presented.

Поступила в редакцию 10.10.2001