По лемме 1 [3], < ρ(a), @ > – инвариантная подгруппа группы < A, @ >, а по теореме 3.3 [2], < B, @ > – подгруппа в < A, @ >, где операция @ определяется по правилу

$$x @ y = [x\bar{a}\underbrace{a \ldots a}_{n-3}y].$$

Следствие 10. Пусть < B, [ ] > – n-арная подгруппа, ρ–конгруэнция n-арной группы < A, [ ] >. Тогда

$$\rho B=\rho(a) @ B = B @ \rho(a).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Monk J.D., Sloson F.M.*** On the general theory of m-groups // Fund. Math., 1971, №72. С. 233-244.
2. ***Гальмак А.М.*** Конгруэнции полиадических групп. Мн., 1999. – 182 с.
3. ***Гальмак А.М.*** О решетке конгруэнций n-арной группы // Веснік ВДУ імя П.М. Машэрава, 2000, № 3(17). С. 60-62
4. ***Мальцев А.И.*** Алгебраические системы. М., 1970. – 392 с.

SUMMARY

In this paper the classes of congruence on polyadic group are studied.

Поступила в редакцию 23.05.2001

УДК 512.542

М.И. Ефремова

О пересечении максимальных τ-подклассов Шунка n-арных групп

Напомним [1], что система <X,()> с одной n-арной операцией () называется n-арной группой, если эта операция ассоциативна и в X разрешимо каждое из уравнений

$$(a_1 \ldots a_{i-1} x a_{i+1} \ldots a_n)=a,$$

где i пробегает 1, 2,... , n. Все рассматриваемые ниже n-арные группы конечны.

Пусть со всякой n-арной группой G сопоставлена некоторая система ее подгрупп τ(G). Мы говорим, следуя [2, 3], что τ-подгрупповой m-функтор, если для любой n-арной группы G система τ(G) \ {G} либо пуста, либо содержит лишь максимальные в G подгруппы и выполняются следующие условия:

1) G ∈ τ(G) для любой n-арной группы G;

2) для любых n-арных групп H ∈ τ(A), T ∈ τ(B) и для любого эпиморфизма φ:A → B имеет место $H^{\varphi} \in \tau(B)$, $T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A)$.

Следуя [4], мы говорим, что класс n-арных групп $\mathfrak{F}$ является τ-классом Шунка, если $\mathfrak{F}$ – гомоморф n-арных групп, т.е. всякий гомоморфный образ любой группы из $\mathfrak{F}$ снова принадлежит $\mathfrak{F}$, и классу $\mathfrak{F}$ принадлежит всякая такая n-арная группа G, что $G/M_G \in \mathfrak{F}$ верно для всех M ∈ τ(G) \ {G}. По определению всякому τ-классу Шунка $\mathfrak{F}$ принадлежит такая n-арная группа G, что τ(G) = {G}.

Нетрудно видеть, что если $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ – произвольное множество τ-классов Шунка, то $\bigcap_{i\in I} \mathfrak{F}_i$ также является τ-классом Шунка. Пусть L_n^{τ} – множество всех τ-классов Шунка n-арных групп. На этом множестве введем частичный порядок $\leq$, полагая $\mathfrak{M} \leq \mathfrak{X}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{X}$. Относительно этого порядка множество L_n^{τ} является полной решеткой и τ-класс Шунка, состоящий из всех n-арных групп, является в нем наибольшим элементом (см. т. 3 на с.149 из [6]).

Пусть $\mathfrak{M}$ – τ-подкласс Шунка τ-класса Шунка $\mathfrak{F}$. Тогда, если $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{F}$ и в $\mathfrak{F}$ нет такого τ-подкласса Шунка $\mathfrak{H}$, что $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{H} \subset \mathfrak{F}$, то $\mathfrak{M}$ называется максимальным τ-подклассом Шунка в $\mathfrak{F}$.

Целью данной работы является описание пересечений максимальных τ-подклассов Шунка.

Лемма 1. *Пусть* $\Sigma = \{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ *– некоторая цепь τ-классов Шунка. Тогда* $\mathfrak{F} = \bigcup_{i\in I} \mathfrak{F}_i$ *– τ-класс Шунка.*

Доказательство. Пусть $A \in \mathfrak{F}$. Значит, существует $i \in I$ такое, что $A \in \mathfrak{F}_i$. Поскольку $\mathfrak{F}_i$ – τ-класс Шунка, то $A/\pi \in \mathfrak{F}_i$ для каждой конгруэнции π на A. Следовательно, $A/\pi \in \bigcup_{i\in I} \mathfrak{F}_i$. Значит, $\mathfrak{F}$ – гомоморф.

Пусть $\{M_1, M_2, \ldots, M_t\}$ – набор всех подгрупп n-арной группы A таких, что $M_i \in \tau(A) \setminus \{A\}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, t$ и пусть $A/(M_i)_A \in \mathfrak{F}$. Покажем, что $A \in \mathfrak{F}$. Пусть $\mathfrak{F}_{i_1}, \mathfrak{F}_{i_2}, \ldots, \mathfrak{F}_{i_t}$ – такие τ-классы Шунка во множестве Σ, что $A/(M_1)_A \in \mathfrak{F}_{i_1}$, $A/(M_2)_A \in \mathfrak{F}_{i_2}, \ldots, A/(M_t)_A \in \mathfrak{F}_{i_t}$. Так как Σ – цепь, то существует такой τ-класс Шунка $\mathfrak{F}_{i_r}$ ($r \in \{1, 2, \ldots, t\}$), который включает в себя τ-классы Шунка $\mathfrak{F}_{i_1}, \mathfrak{F}_{i_2}, \ldots, \mathfrak{F}_{i_t}$. Значит, $A/(M_1)_A \in \mathfrak{F}_{i_r}$, $A/(M_2)_A \in \mathfrak{F}_{i_r}, \ldots, A/(M_t)_A \in \mathfrak{F}_{i_r}$. Но поскольку $\mathfrak{F}_{i_r}$ – τ-класс Шунка, то из последнего вытекает, что $A \in \mathfrak{F}_{i_r} \subseteq \mathfrak{F}$. Значит, $\mathfrak{F}$ – τ-класс Шунка. Лемма доказана.

Если $\mathfrak{X}$ – произвольный класс n-арных групп, то пересечение всех τ-классов Шунка, содержащих $\mathfrak{X}$, снова является τ-классом Шунка. Мы называем его τ-классом Шунка, порожденным $\mathfrak{X}$, и обозначаем $\mathrm{Schunck}_\tau\mathfrak{X}$. Если τ-класс Шунка $\mathfrak{F}$ таков, что $\mathfrak{F} = \mathrm{Schunck}_\tau G$ для некоторой его n-арной группы G, то класс $\mathfrak{F}$ называется однопорожденным τ-классом Шунка.

Лемма 2. *Пусть G – n-арная группа, принадлежащая τ-классу Шунка $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}$ – его τ-подкласс Шунка, не содержащий G. Тогда в $\mathfrak{F}$ существует τ-подкласс Шунка $\mathfrak{M}$, содержащий $\mathfrak{H}$ и максимальный среди всех τ-подклассов Шунка из $\mathfrak{F}$, не содержащих G.*

Доказательство. Пусть Ω – множество всех тех τ-подклассов Шунка из $\mathfrak{F}$, которые содержат $\mathfrak{H}$, но не содержат группу G. Пусть $\Sigma = \{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ – некоторая цепь в Ω и $\mathfrak{M} = \bigcup_{i\in I} \mathfrak{F}_i$.

Покажем, что $\mathfrak{M} \in \Omega$. По лемме 1 $\mathfrak{M}$ – τ-класс Шунка и $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M}$. Заметим, что если G принадлежит $\mathfrak{M}$, тогда существует $i \in I$ такое, что G принадлежит $\mathfrak{F}_i$. Это противоречит определению класса $\mathfrak{F}_i$. Следовательно, G не принадлежит $\mathfrak{M}$. Отсюда следует, что $\mathfrak{M} \neq \mathfrak{F}$. Следовательно, $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{F}$.

Итак, $\mathfrak{M} \in \Omega$. Следовательно, ввиду леммы Цорна мы можем заключить, что $\mathfrak{H}$ входит в некоторый максимальный τ-подкласс Шунка τ-класса Шунка $\mathfrak{F}$. Лемма доказана.

Символом $\Phi_\tau(\mathfrak{F})$ мы обозначим нижнюю грань для множества всех коатомов решетки всех τ-подклассов Шунка произвольного τ-класса Шунка конечных n-арных групп $\mathfrak{F}$. ($\Phi_\tau(\mathfrak{F}) = \mathfrak{F}$, если в такой решетке нет ни одного коатома).

n-Арная группа G называется τ-необразующей для класса Шунка $\mathfrak{F}$, если $G \in \mathfrak{F}$ и всегда из

$$\mathfrak{F} = \mathrm{Schunck}_\tau(\mathfrak{X} \cup \{G\})$$

следует, что $\mathfrak{F} = \mathrm{Schunck}_\tau\mathfrak{X}$.

В работе [7] доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Решетка* L_n^τ *дистрибутивна.*

Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ такие τ-классы Шунка, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M}$. Тогда символом $\mathfrak{M}/\mathfrak{H}$ обозначается решетка всех τ-классов Шунка, заключенных между $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$.

Теорема 2. *Пусть* $\mathfrak{F} \neq (1)$ *– непустой* τ*-класс Шунка. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $\Phi_\tau(\mathfrak{F})$ *состоит из всех* τ*-необразующих для* τ*-класса Шунка* $\mathfrak{F}$ *n-арных групп;*

2) *если* $\mathfrak{M}$ *–* τ*-подкласс Шунка* $\mathfrak{F}$, *то* $\Phi_\tau(\mathfrak{M}) \subseteq \Phi_\tau(\mathfrak{F})$.

Доказательство. Докажем утверждение 1). Пусть G – произвольная τ-необразующая группа для τ-класса Шунка $\mathfrak{F}$. Тогда если $\mathfrak{F}_1$ – некоторый максимальный τ-подкласс Шунка τ-класса Шунка $\mathfrak{F}$ и $G \notin \mathfrak{F}_1$, то

$$\mathrm{Schunck}_\tau(\mathfrak{F}_1 \cup \{G\}) = \mathrm{Schunck}_\tau(\mathfrak{F}_1) = \mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}.$$

Противоречие. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}_1$ для любого максимального τ-класса Шунка $\mathfrak{F}_1$ из τ-класса Шунка $\mathfrak{F}$. Значит, $G \in \Phi_\tau(\mathfrak{F})$.

Обратно, пусть $G \in \Phi_\tau(\mathfrak{F})$. Докажем, что G является τ-необразующей группой для τ-класса Шунка $\mathfrak{F}$. Предположим, что

$$\mathfrak{F} = \mathrm{Schunck}_\tau(\mathfrak{F}_1 \cup \{G\}),$$

где $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}$, а $\mathrm{Schunck}_\tau\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{H} \neq \mathfrak{F}$. По лемме 2 существует τ-подкласс Шунка $\mathfrak{M}$ из $\mathfrak{F}$, содержащий $\mathfrak{H}$ и максимальный среди τ-подклассов Шунка из $\mathfrak{F}$, не содержащих группу G. Докажем, что этот τ-подкласс Шунка $\mathfrak{M}$ просто максимален от противного. Допустим, что $\mathfrak{M}$ – не максимальный τ-подкласс Шунка из $\mathfrak{F}$, тогда существует $\mathfrak{M}_1 \supset \mathfrak{M}$ – τ-подкласс Шунка из $\mathfrak{F}$. В силу нашего выбора τ-подкласса Шунка $\mathfrak{M}$ любой τ-подкласс Шунка, строго содержащий $\mathfrak{M}$, должен содержать и G. Итак, $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{F}$, $G \in \mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{M}_1$.

Следовательно,

$$\mathrm{Schunck}_\tau(\mathfrak{M}_1 \cup \{G\}) \supseteq \mathrm{Schunck}_\tau(\mathfrak{F}_1 \cup \{G\}) = \mathfrak{F}.$$

А

$$\mathrm{Schunck}_\tau(\mathfrak{M}_1 \cup \{G\}) = \mathrm{Schunck}_\tau(\mathfrak{M}_1) = \mathfrak{M}_1.$$

Значит, $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{F}$. Противоречие. Следовательно, $\mathfrak{M}$ – максимальный τ-подкласс Шунка, не содержащий группу G, что противоречит условию $G \in \Phi_\tau(\mathfrak{F})$. Итак, $\mathrm{Schunck}_\tau(\mathfrak{F}_1) = \mathfrak{F}$. Значит, любая группа $G \in \Phi_\tau(\mathfrak{F})$ является τ-необразующей для τ-класса Шунка $\mathfrak{F}$.

Докажем утверждение 2). Предположим, что $\Phi_\tau(\mathfrak{M}) \not\subseteq \Phi_\tau(\mathfrak{F})$. Тогда в τ-классе Шунка $\mathfrak{F}$ найдется такой максимальный τ-подкласс Шунка $\mathfrak{F}_1$, что $\Phi_\tau(\mathfrak{M}) \not\subseteq \mathfrak{F}_1$. Следовательно, $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{F}_1$. Поскольку решетка всех τ-классов Шунка дистрибутивна [7], то имеет место решеточный изоморфизм

$$\mathfrak{F}_1 \vee \mathfrak{M}/\mathfrak{F}_1 \cong \mathfrak{M}/\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}_1.$$

Так как $\mathfrak{F}_1$ – максимальный τ-подкласс Шунка в τ-классе Шунка $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{F}_1$, то

$$\mathfrak{F}_1 \vee \mathfrak{M} = \mathrm{Schunck}_\tau(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{M}) = \mathfrak{F}.$$

Поэтому решетка $\mathfrak{F}_1 \vee \mathfrak{M}/\mathfrak{F}_1$ содержит лишь два элемента. Значит, $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}_1$ – максимальный τ-подкласс Шунка в $\mathfrak{M}$. Следовательно, $\Phi_\tau(\mathfrak{M}) \subseteq \mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}_1$ и поэтому $\Phi_\tau(\mathfrak{M}) \subseteq \mathfrak{F}_1$. Противоречие. Итак, $\Phi_\tau(\mathfrak{M}) \subseteq \Phi_\tau(\mathfrak{F})$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Русаков С.А.*** Алгебраические n-арные системы. Мн., 1992. – 264 с.
2. ***Селькин М.В.*** Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп. Мн., 1997. – 144 с.
3. ***Скиба А.Н.*** Алгебра формаций. Мн., 1997. – 240 с.
4. ***Селькин М.В., Скиба А.Н.*** О решетках τ-классов Шунка // Доклады национальной академии наук Беларуси, 2001, том 45, №3. С. 51-53.
5. ***Аль-Дабабсех А.Ф.*** Решетки формаций и классов Шунка n-арных групп // Препринт, Гомельский госуниверситет, 1999, №87. – 17 с.
6. ***Биркгоф Г.*** Теория решеток. М., 1984. – 568 с.
7. ***Ефремова М.И.*** О дистрибутивности решетки τ-классов Шунка конечных n-арных групп // Вопросы алгебры. Гомель, 2001, Вып. 18. С. 182-186.

SUMMARY

The cross of maximal Schunck τ-subclasses of n-ary groups is described with the help of the classes theory and General Lattice Theory. Besides, the infimum for the set of all coatoms of the lattice of all Schunck τ-subclasses of an arbitrary Schunck τ-class is described. All obtained in the article results have a theoretical character and are able to use in studying classes of finite n-ary groups.

Поступила в редакцию 1.11.2001

УДК 518:517.948

Ю.В. Трубников

Об одном новом алгоритме нахождения спектральных радиусов

Предлагается алгоритм вычисления спектрального радиуса ρ матрицы с комплексными элементами, основанный на построении алгебраического уравнения, одним из корней которого является ρ^2.

Рассмотрим произвольную [n x n] – матрицу A с комплексными элементами $a_{ij}(i,j=1,2,\ldots,n)$. Пусть

$$P(z) \equiv z^n + a_1 e^{i\varphi_1} z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} e^{i\varphi_{n-1}} + a_n e^{i\varphi_n} = 0 \qquad (1)$$

– характеристическое уравнение матрицы A с комплексными коэффициентами, модули которых $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Напомним [1], что совокупность всех собственных значений $\lambda \in C$ (C – множество комплексных чисел) называется спектром матрицы A и обозначается σ(A). Неотрицательное вещественное число

$$\rho \equiv \rho(A) \equiv \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$$

называется спектральным радиусом матрицы *A*. Спектральный радиус совпадает с радиусом наименьшего круга с центром в начале координат на комплексной плоскости, который содержит все собственные значения матрицы A.