УДК 512.548

А.М. Гальмак

О смежных классах конгруэнции полиадической группы

Первой работой, посвящённой конгруэнциям n-арных групп, была статья Монка и Сиосона [1], в которой они установили перестановочность конгруэнций произвольной n-арной группы. Много полезной информации о конгруэнциях n-арных групп имеется в книге [2], где в частности доказано, что для каждой n-арной группы все смежные классы по одной и той же произвольной конгруэнции имеют одну и ту же мощность. Оба отмеченных свойства справедливы для любого $n \ge 2$, т.е. являются общими для групп и n-арных групп ($n \ge 3$).

Конгруэнции групп обладают ещё одним очень важным свойством: любой смежный класс конгруэнции группы можно выразить через один и тот же смежный класс этой же конгруэнции. А именно, через смежный класс, содержащий единицу группы и являющийся нормальной подгруппой в группе. n-Арная группа, как известно, может не обладать единицей. Более того, существуют n-арные группы, обладающие нетривиальными конгруэнциями, но не имеющие собственных n-арных подгрупп. И тем не менее, следующая теорема утверждает, что любой смежный класс конгруэнции n-арной группы ($n \ge 3$) можно выразить через один и тот же смежный класс этой же конгруэнции. Среди многочисленных следствий этой теоремы содержится и отмеченный выше результат из [2].

Теорема 1. *Пусть* $< A, [\ ] >$ – *n-арная группа*, ρ – *её конгруэнция*, $a_1, \ldots, a_{n-2} \in A$, $i \in \{0, 1, \ldots, n-2\}$. *Тогда*

$$\rho(x) = [x a_1 \ldots a_i \rho(c) a_{i+1} \ldots a_{n-2}]$$

для любого $x \in A$, *где*

$$c = [\bar{a}_i \overset{n-3}{a_i} \ldots \bar{a}_1 \overset{n-3}{a_1} \bar{a}_{n-2} \overset{n-3}{a_{n-2}} \ldots \bar{a}_{i+1} \overset{n-3}{a_{i+1}}]$$

Доказательство. Если $y \in \rho(x)$, то по лемме 9.7 [2] $(\bar{x}, \bar{y}) \in \rho$. Так как в A существует элемент z такой, что

$$y = [x a_1 \ldots a_i z a_{i+1} \ldots a_{n-2}],$$

то из последнего равенства, учитывая $(x, y) \in \rho$, $(\bar{x}, \bar{y}) \in \rho$, получаем

$$([\bar{a}_i \overset{n-3}{a_i} \ldots \bar{a}_1 \overset{n-3}{a_1} \bar{y} \overset{n-3}{y} y \bar{a}_{n-2} \overset{n-3}{a_{n-2}} \ldots \bar{a}_{i+1} \overset{n-3}{a_{i+1}}],$$

$$[\bar{a}_i \overset{n-3}{a_i} \ldots \bar{a}_1 \overset{n-3}{a_1} \bar{x} \overset{n-3}{x} [x a_1 \ldots a_i z a_{i+1} \ldots a_{n-2}] \bar{a}_{n-2} \overset{n-3}{a_{n-2}} \ldots \bar{a}_{i+1} \overset{n-3}{a_{i+1}}]) \in \rho,$$

откуда

$$([\bar{a}_i \overset{n-3}{a_i} \ldots \bar{a}_1 \overset{n-3}{a_1} \bar{a}_{n-2} \overset{n-3}{a_{n-2}} \ldots \bar{a}_{i+1} \overset{n-3}{a_{i+1}}], z) \in \rho,$$

т.е. $z \in \rho(c)$. Следовательно,

$$y = [xa_1 \ldots a_i z a_{i+1} \ldots a_{n-2}] \in [xa_1 \ldots a_i\, \rho\, (c) a_{i+1} \ldots a_{n-2}]$$

и доказано включение

$$\rho(x) \subseteq [xa_1 \ldots a_i\, \rho\, (c) a_{i+1} \ldots a_{n-2}] .$$

Пусть теперь

$$y \in [xa_1 \ldots a_i \rho\, (c) a_{i+1} \ldots a_{n-2}] \text{, т.е. } y = [xa_1 \ldots a_i z a_{i+1} \ldots a_{n-2}]$$

для некоторого $z \in \rho(c)$. Тогда из последнего равенства, учитывая $(c, z) \in \rho$, $(\bar{c}, \bar{z}) \in \rho$, получаем

$$([y \overset{n-3}{\bar{a}_{n-2}} a_{n-2} \ldots \overset{n-3}{\bar{a}_{i+1}} a_{i+1} \overset{n-3}{\bar{c}}\, c\, \overset{n-3}{\bar{a}_i}\, a_i \ \ldots \overset{n-3}{\bar{a}_1} a_1],$$

$$[[xa_1 \ldots a_i z a_{i+1} \ldots a_{n-2}] \overset{n-3}{\bar{a}_{n-2}} a_{n-2} \ldots$$

$$\ldots \overset{n-3}{\bar{a}_{i+1}} a_{i+1} \overset{n-3}{\bar{z}}\, z\, \overset{n-3}{\bar{a}_i}\, a_i \ \ldots \overset{n-3}{\bar{a}_1} a_1]) \in \rho,$$

$$([y \overset{n-3}{\bar{a}_{n-2}} a_{n-2} \ldots \overset{n-3}{\bar{a}_{i+1}} a_{i+1} \overset{n-3}{\bar{c}}\, c\, \overset{n-3}{\bar{a}_i}\, a_i \ \ldots \overset{n-3}{\bar{a}_1} a_1], x) \in \rho.$$

Так как последовательность $a_1 \ldots a_i c a_{i+1} \ldots a_{n-2}$ – нейтральная, то обратная к ней последовательность

$$\overset{n-3}{\bar{a}_{n-2}} a_{n-2} \ldots \overset{n-3}{\bar{a}_{i+1}} a_{i+1} \overset{n-3}{\bar{c}}\, c\, \overset{n-3}{\bar{a}_i}\, a_i \ \ldots \overset{n-3}{\bar{a}_1} a_1$$

так же является нейтральной. Поэтому доказано $(y, x) \in \rho$, т.е. $y \in \rho(x)$. Следовательно,

$$[xa_1 \ldots a_i\, \rho\, (c) a_{i+1} \ldots a_{n-2}] \subseteq \rho(x).$$

Из доказанных включений следует требуемое равенство. Теорема доказана.

Аналогично доказывается двойственная теорема.

Теорема 2. *Пусть* $< A, [\,] >$ – n*-арная группа,* ρ – *ее конгруэнция,* $a_1, \ldots, a_{n-2} \in A$, $i \in \{0, 1, \ldots, n - 2\}$. *Тогда*

$$\rho\, (x) = [a_1 \ldots a_i \rho\, (c) a_{i+1} \ldots a_{n-2} x]$$

для любого $x \in A$, *где* c *тот же, что и в предыдущей теореме.*

Если в теоремах 1 и 2 положить $a_1 = \ldots = a_{n-2} = a$, то

$$c = [\underbrace{\overset{n-3}{\bar{a}}\, a \ldots \overset{n-3}{\bar{a}}\, a}_{n-2}\,] = \bar{a} .$$

Поэтому имеет место

Следствие 1. Пусть $<A, [\,] >$ – n-арная группа, ρ – её конгруэнция, $a \in A$, $i \in \{0, 1, \ldots, n - 2\}$. Тогда

$$\rho(x) = [x \underbrace{a \ldots a}_{i} \rho(\bar{a}) \underbrace{a \ldots a}_{n-i-2}] = [\underbrace{a \ldots a}_{i} \rho(\bar{a}) \underbrace{a \ldots a}_{n-i-2} x]$$

для любого $x \in A$.

Если в теоремах 1 и 2 положить

$$i \in \{0, 1, \ldots, n - 3\},\ j \in \{i + 1, \ldots, n - 2\},$$

$$a_1 = \ldots = a_i = a_{i+1} = \ldots = a_{j-1} = a_{j+1} = \ldots = a_{n-2} = a,\ a_j = \bar{a} ,$$

то, используя лемму 2.4 [2], получим

$$c = [\underbrace{\overset{n-3}{\bar{a}}\, a \ldots \overset{n-3}{\bar{a}}\, a}_{i}\ \underbrace{\overset{n-3}{\bar{a}}\, a \ldots \overset{n-3}{\bar{a}}\, a}_{n-j-2}\ \overset{n-3}{\bar{\bar{a}}}\ \bar{a}\ \underbrace{\overset{n-3}{\bar{a}}\, a \ldots \overset{n-3}{\bar{a}}\, a}_{j-i-1}\,] =$$

$$[\underbrace{\overset{n-3}{\bar{a}}\, a \ldots \overset{n-3}{\bar{a}}\, a}_{n+i-j-2}\ [\underbrace{a\ \ldots\ a}_{(n-3)(n-1)+1}]\ \overset{n-3}{\bar{a}}\ \underbrace{\overset{n-3}{\bar{a}}\, a \ldots \overset{n-3}{\bar{a}}\, a}_{j-i-1}\,] =$$

$$= [\overline{a}\,\underbrace{\overset{n-3}{a} \ldots \overline{a}\,\overset{n-3}{a}}_{n-3}\ \overset{n-3}{a}\ [\ \underbrace{a \ \ldots \ a}_{(n-3)(n-2)+1}\ \overset{n-3}{\overline{a}}\ ]] = a$$

Поэтому имеет место

Следствие 2. Пусть $< A, [\,] >$ – n-арная группа, ρ – ее конгруэнция, $a \in A$, $i \in \{0, 1, \ldots, n - 3\}$, $j \in \{i + 1, \ldots, n - 2\}$. Тогда

$$\rho(x) = [x\underbrace{a \ldots a}_{i}\rho(a)\underbrace{a \ldots a}_{j-i-1}\ \overline{a}\ \underbrace{a \ldots a}_{n-j-2}] = [\underbrace{a \ldots a}_{i}\rho(a)\underbrace{a \ldots a}_{j-i-1}\ \overline{a}\ \underbrace{a \ldots a}_{n-j-2}x].$$

Если в теоремах 1 и 2 положить

$$i \in \{1, \ldots, n-2\},\ j \in \{1, \ldots, i\},$$

$$a_1 = \ldots = a_{j-1} = a_{j+1} = \ldots = a_i = a_{i+1} = \ldots = a_{n-2} = a,\ a_j = \overline{a},$$

то снова $c = a$ и имеет место

Следствие 3. Пусть $< A, [\,] >$ – n-арная группа, ρ – ее конгруэнция, $a \in A$, $i \in \{1, \ldots, n - 2\}$, $j \in \{1, \ldots, i\}$. Тогда

$$\rho(x) = [x\underbrace{a \ldots a}_{j-1}\ \overline{a}\ \underbrace{a \ldots a}_{i-j}\ \rho(a)\underbrace{a \ldots a}_{n-i-2}] = [\underbrace{a \ldots a}_{j-i}\ \overline{a}\ \underbrace{a \ldots a}_{i-j}\ \rho(a)\underbrace{a \ldots a}_{n-i-2}x].$$

Если в обоих равенствах следствия 1 положить $x = a$, то получим

$$\rho(a) = [a\underbrace{a \ldots a}_{i}\rho(a)\underbrace{a \ldots a}_{n-i-2}],\ \rho(a) = [\underbrace{a \ldots a}_{i}\rho(a)\underbrace{a \ldots a}_{n-i-2}a],$$

где $i = 0, 1, \ldots, n - 2$. Поэтому имеет место

Следствие 4. Пусть $< A, [\,] >$ – n-арная группа, ρ – ее конгруэнция. Тогда

$$\rho(a) = [\underbrace{a \ldots a}_{i}\ \rho(\overline{a})\underbrace{a \ldots a}_{n-i-1}]$$

для любых $a \in A$, $i \in \{0, 1, \ldots, n - 1\}$.

Полагая в следствии 2 $x = a$, получим

Следствие 5. Пусть $< A, [\,] >$ – n-арная группа, ρ – ее конгруэнция. Тогда

$$\rho(a) = [\underbrace{a \ldots a}_{i}\ \rho(a)\underbrace{a \ldots a}_{n-i-2}\ \overline{a}],$$

для любых $a \in A$, $i \in \{0, 1, \ldots, n - 2\}$.

Полагая в следствии 3 $x = a$, получим

Следствие 6. Пусть $< A, [\,] >$ – n-арная группа, ρ – ее конгруэнция. Тогда

$$\rho(a) = [\,\overline{a}\ \underbrace{a \ldots a}_{i}\ \rho(a)\underbrace{a \ldots a}_{n-i-2}]$$

для любых $a \in A$, $i \in \{0, 1, \ldots, n - 2\}$.

Замечание. Если положить вследствие 5 $i = 1$, то получим равенство $\rho(a) = [a\rho(a)\alpha]$ из леммы 1 [3], где α – обратная последовательность для a.

Согласно теореме 1, мощность смежного класса $\rho(x)$ совпадает с мощностью класса $\rho(c)$. Поэтому имеет место

Следствие 7([2]. Предложение 10.11). Все классы конгруэнции, определённой на n-арной группе, имеют одну и ту же мощность.

Для всякой n-арной подгруппы $< B, [\,] >$ n-арной группы $< A, [\,] >$ и любой конгруэнции σ на $< A, [\,] >$ положим (см., например, [4], с. 65)

$$\sigma B = \{x \in A \mid \exists b \in B,\ (x, b) \in \sigma\}.$$

Ясно, что

$$\sigma B = \{x \in A \mid B \cap \sigma(x) \neq \varnothing\} = \bigcup_{b \in B} \sigma(b).$$

Теорема 3. *Пусть* $<B, [\,]>$ – *n-арная подгруппа,* ρ – *конгруэнция n-арной группы* $<A, [\,]>$. *Тогда*

$$\rho B = [\rho(a)\bar{a}\underbrace{a\ldots a}_{n-3}B] = [B\bar{a}\underbrace{a\ldots a}_{n-3}\rho(a)],$$

$$\rho B = [\rho(\bar{a})\underbrace{a\ldots a}_{n-2}B] = [B\underbrace{a\ldots a}_{n-2}\rho(\bar{a})]$$

для любого $a \in A$.

Доказательство. Полагая во втором равенстве следствия 2 $i = 0$, $j = 1$, получаем

$$\rho(x) = [\rho(a)\bar{a}\underbrace{a\ldots a}_{n-3}x] \qquad (*)$$

для любых $x, a \in A$.

Если $u \in \rho B$, то $u \in \rho(b)$ для некоторого $b \in B$, откуда и из (*) следует

$$u \in [\rho(a)\bar{a}\underbrace{a\ldots a}_{n-3}b] \subseteq [\rho(a)\bar{a}\underbrace{a\ldots a}_{n-3}B],$$

т.е.

$$u \in [\rho(a)\bar{a}\underbrace{a\ldots a}_{n-3}B]$$

и значит

$$\rho B \subseteq [\rho(a)\bar{a}\underbrace{a\ldots a}_{n-3}B]. \qquad (**)$$

Пусть теперь

$$v \in [\rho(a)\bar{a}\underbrace{a\ldots a}_{n-3}B] \text{ т.е. } v \in [\rho(a)\bar{a}\underbrace{a\ldots a}_{n-3}b]$$

для некоторого $b \in B$, откуда и из (*) следует $v \in \rho(b)$. Следовательно, $v \in \rho B$ и значит

$$[\rho(a)\bar{a}\underbrace{a\ldots a}_{n-3}B] \subseteq \rho B. \qquad (***)$$

Из (**) и (***) следует первое из требуемых равенств. Остальные равенства доказываются аналогично. Теорема доказана.

Если в теореме 3 положить $a \in B$, то $\bar{a} \in B$ и значит верно

Следствие 8. Пусть $<B, [\,]>$ – n-арная подгруппа, ρ – конгруэнция n-арной группы $<A, [\,]>$, $a \in B$. Тогда

$$\rho B = [\rho(a)\underbrace{B\ldots B}_{n-1}] = [\underbrace{B\ldots B}_{n-1}\rho(a)],$$

$$\rho B = [\rho(\bar{a})\underbrace{B\ldots B}_{n-1}] = [\underbrace{B\ldots B}_{n-1}\rho(\bar{a})].$$

Пусть $<C, [\,]>$ – полуинвариантная n-арная подгруппа n-арной группы $<A, [\,]>$, ρ_C – конгруэнция, определяемая $<C, [\,]>$. Тогда согласно предложению 7.4 [2], $\rho_C(a) = C$ для любого $a \in C$. Поэтому из теоремы 3, учитывая $\bar{a} \in C$, получаем

Следствие 9 ([2], лемма 9.8). Пусть $<B, [\,]>$ и $<C, [\,]>$ – n-арные подгруппы n-арной группы $<A, [\,]>$, причем $<C, [\,]>$ – полуинвариантна в $<A, [\,]>$. Тогда

$$\rho_C B = [\underbrace{C\ldots C}_{n-1}B] = [B\underbrace{C\ldots C}_{n-1}].$$

По лемме 1 [3], < $\rho(a)$, @ > – инвариантная подгруппа группы < A, @ >, а по теореме 3.3 [2], < B, @ > – подгруппа в < A, @ >, где операция @ определяется по правилу

$$x @ y = [x\bar{a}\underbrace{a\ldots a}_{n-3}y].$$

Следствие 10. Пусть < B, [ ] > – n-арная подгруппа, ρ –конгруэнция n-арной группы < A, [ ] >. Тогда

$$\rho B=\rho(a) @ B = B @ \rho(a).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Monk J.D., Sloson F.M.*** On the general theory of m-groups // Fund. Math., 1971, №72. C. 233-244.
2. ***Гальмак А.М.*** Конгруэнции полиадических групп. Мн., 1999. – 182 с.
3. ***Гальмак А.М.*** О решетке конгруэнций n-арной группы // Веснік ВДУ імя П.М. Машэрава, 2000, № 3(17). С. 60-62
4. ***Мальцев А.И.*** Алгебраические системы. М., 1970. – 392 с.

SUMMARY

In this paper the classes of congruence on polyadic group are studied.

Постуила в редакцию 23.05.2001

УДК 512.542

М.И. Ефремова

О пересечении максимальных τ-подклассов Шунка n-арных групп

Напомним [1], что система <X,()> с одной n-арной операцией () называется n-арной группой, если эта операция ассоциативна и в X разрешимо каждое из уравнений

$$(a_1 \ldots a_{i-1} x a_{i+1} \ldots a_n)=a,$$

где i пробегает 1, 2,... , n. Все рассматриваемые ниже n-арные группы конечны.

Пусть со всякой n-арной группой G сопоставлена некоторая система ее подгрупп $\tau(G)$. Мы говорим, следуя [2, 3], что τ-подгрупповой m-функтор, если для любой n-арной группы G система $\tau(G) \setminus \{G\}$ либо пуста, либо содержит лишь максимальные в G подгруппы и выполняются следующие условия:

1) $G \in \tau(G)$ для любой n-арной группы G;

2) для любых n-арных групп $H \in \tau(A)$, $T \in \tau(B)$ и для любого эпиморфизма $\varphi: A \to B$ имеет место $H^{\varphi} \in \tau(B)$, $T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A)$.

Следуя [4], мы говорим, что класс n-арных групп $\mathfrak{F}$ является τ-классом Шунка, если $\mathfrak{F}$ – гомоморф n-арных групп, т.е. всякий гомоморфный образ любой группы из $\mathfrak{F}$ снова принадлежит $\mathfrak{F}$, и классу $\mathfrak{F}$ принадлежит всякая такая n-арная группа G, что $G/M_G \in \mathfrak{F}$ верно для всех $M \in \tau(G) \setminus \{G\}$. По определению всякому τ-классу Шунка $\mathfrak{F}$ принадлежит такая n-арная группа G, что $\tau(G) = \{G\}$.