УДК 512.542

В.Г. Сементовский

Инъекторы конечных π-разрешимых групп для произведений и пересечений классов Фиттинга

В работе [I] доказан признак существования и сопряженности инъекторов π-разрешимых групп. Данная работа посвящена нахождению классов Фиттинга, удовлетворяющих этому признаку. Для этого сначала такие классы находятся путем непосредственной проверки, а затем доказывается, что для классов Фиттинга, удовлетворяющих данному признаку, их пересечение, а при некоторых ограничениях, и произведение, тоже удовлетворяет этому признаку. Таким образом получаем новые классы Фиттинга, для которых в π-разрешимых группах доказаны существование и сопряженность инъекторов.

Рассматриваемые в работе группы – конечны π–разрешимы. Терминология работы общепринята. В данной работе будут использованы некоторые результаты работы [I]. Сформулируем их.

Определение I. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ назовем удовлетворяющим условию (*), если во всякой π–разрешимой группе G вида $G=WG_{\pi'}$, где W – нормальная $\mathfrak{F}$-подгруппа группы G, всякие две $\mathfrak{F}$-максимальные подгруппы группы G, содержащие W, сопряжены.

Определение 2. Пусть $I=G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_n=G$, нормальный ряд π-разрешимой группы G и $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга. Будем говорить, что подгруппа V $\mathfrak{F}$-иньектирует заданный ряд, если для любого $i = 1,2,\ldots,n$ подгруппа $V\cap G_i$ будет $\mathfrak{F}$-максимальной в G_i.

Из доказательства теоремы 10 и леммы 9 из [I] индукцией по числу факторов нормального ряда с π-разложимыми факторами группы G получим следующий критерий существования и сопряженности инъекторов π-разрешимых групп.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга и G – произвольная π-разрешимая группа. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *класс $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию (*);*

2) *множество всех подгрупп группы G, которые $\mathfrak{F}$-инъектируют хотя бы один нормальный ряд с π-разложимыми факторами группы G, образует единственный класс сопряженных $\mathfrak{F}$-инъекторов.*

Следствие1. Пусть класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию (*) и $G\in\mathfrak{S}^{\pi}$. Если G/N – π-разложима, R – $\mathfrak{F}$-инъектор подгруппы N и V– $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа группы G, содержащая R, то V будет $\mathfrak{F}$-инъектором группы G.

Следствие 2. Пусть класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию (*) и V – $\mathfrak{F}$-инъектор π–разрешимой группы G. Если $V \subseteq A \subseteq G$, то V будет $\mathfrak{F}$-инъектором подгруппы A.

Заметим, что если класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию (*), то множество всех $\mathfrak{F}$-максимальных подгрупп группы $G=WG_{\pi'}$, содержащих W, будет единственным классом сопряженных $\mathfrak{F}$-инъекторов группы G. Пусть V – $\mathfrak{F}$-инъектор группы G. Если $G=W^*G_{\pi'}$, где W^* – нормальная $\mathfrak{F}$-подгруппа группы G, то $W^* \subseteq V$, и множество всех $\mathfrak{F}$-максимальных подгрупп группы G, содержащих W^*, тоже образует единственный класс сопряженных $\mathfrak{F}$-инъекторов группы G. Таким образом, для проверки условия (*) в качестве W можно выбрать любую нормальную $\mathfrak{F}$-подгруппу группы G, содержащую G_π, в частности – $G_{\mathfrak{F}}$.

Применим теорему 1 к доказательству существования и сопряженности инъекторов π–разрешимых групп для некоторых классов Фиттинга.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{X}$ – произвольный класс Фиттинга, π–множество простых чисел и $\rho \subseteq \pi$. Тогда следующие классы Фиттинга удовлетворяют условию* (*):

1) $\mathfrak{F} = \mathfrak{X}_\rho \times \mathfrak{E}_{\rho'} = \{G \in \mathfrak{S}^\pi \mid G=G_\rho \times G_{\rho'}, G_\rho \in \mathfrak{X}\}$;
2) $\mathfrak{F} = \mathfrak{X}_\rho \times \mathfrak{E}_q = \{G \in \mathfrak{S}^\pi \mid G=G_\rho \times G_q, G_\rho \in \mathfrak{X}, q \in \rho'\}$;
3) $\mathfrak{F} = \mathfrak{X}\,\mathfrak{E}_{\rho'}$;
4) $\mathfrak{F} = \mathfrak{X}\,\mathfrak{E}_q$, где $q \in \rho'$;
5) $\mathfrak{F} = \mathfrak{E}_{\rho'}\mathfrak{X}_\rho$;
6) $\mathfrak{F} = \mathfrak{E}_q\mathfrak{X}_\rho$, где $q \in \rho'$;
7) $\mathfrak{D}^\rho = \{G \in \mathfrak{S}^\pi \mid G/C_G((O_\rho(G)) \in \mathfrak{E}_\rho\}$.

Доказательство. Так как $\rho \subseteq \pi$, то всякая π–разрешимая группа G будет ρ–разрешимой.

1) Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{X}_\rho \times \mathfrak{E}_{\rho'}$ и $G=WG_{\rho'} \in \mathfrak{S}^\pi$, где W– нормальная $\mathfrak{F}$-подгруппа группы G. Тогда $W=W_\rho \times W_{\rho'}$ и $G=W_\rho G_{\rho'}$, причем W_ρ нормальна в G. Если V – $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа группы G и $W \subseteq V$, то $V=W_\rho C_{G_{\rho'}}(W_\rho)=W_\rho O_{\rho'}(G)$ нормальна в G. Итак, $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа группы G, содержащая W, единственна, и класс $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию (*).

2) Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{X}_\rho \times \mathfrak{E}_q$ и $G=WG_{\rho'} \in \mathfrak{S}^\pi$, где W – нормальная $\mathfrak{F}$-подгруппа группы G. Тогда $W=W_\rho \times W_q$ и $G=W_\rho G_{\rho'}$, где W_ρ нормальна в G. Если V – $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа группы G среди всех, содержащих W, то $V=W_\rho V_q$, где V_q – q–силовская из $O_{\rho'}(G)$. Так как всякие две q-силовские подгруппы из $O_{\rho'}(G)$ сопряжены, то сопряженными будут всякие две $\mathfrak{F}$-максимальные подгруппы группы G, содержащие W.

Итак, класс $\mathfrak{F} = \mathfrak{X}_\rho \times E_q$ удовлетворяет условию (*).

3) Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{X}\,\mathfrak{E}_{\rho'}$, $G=WG_{\rho'} \in \mathfrak{S}^\pi$, $W \in \mathfrak{F}$ и W нормальна в G. Так как $W=W_{\mathfrak{X}}W_{\rho'}$, то $G=W_{\mathfrak{X}}G_{\rho'}$. Тогда $G=G_{\mathfrak{X}}G_{\rho'}$, и, следовательно $G \in \mathfrak{F}$. Итак, класс $\mathfrak{F} = \mathfrak{X}\,\mathfrak{E}_{\rho'}$ удовлетворяет условию (*).

4) Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{X}\,\mathfrak{E}_q$, где $q \in \rho'$, $G=WG_{\rho'} \in \mathfrak{S}^\pi$, W-нормальная $\mathfrak{F}$-подгруппа группы G. Так как $W=W_{\mathfrak{X}}W_q$, то $G=W_{\mathfrak{X}}G_{\rho'}$. Отсюда всякая $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа V группы G, содержащая W, имеет вид $V=W_{\mathfrak{X}}G_q=V_{\mathfrak{X}}G_q$. Всякие две

подгруппы такого вида сопряжены. Следовательно класс $\mathfrak{F} = \mathfrak{X}\,\mathfrak{E}_q$ удовлетворяет условию (*).

5) Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{E}_{p'}\,\mathfrak{X}_p$ и $G=WG_{p'} \in \mathfrak{S}^{\pi}$, где W – нормальная $\mathfrak{F}$-подгруппа группы G. Тогда $W = W_p\, W_{p'}$, где $W_p \in \mathfrak{X}_p$. Пусть V и V^*–подгруппы, $\mathfrak{F}$-максимальные в G и содержащие W. Так как $G=W_p\, G_{p'}$, то $V=W_p\, W_{p'}$ и $V^*=W_p\, V^*_{p'}$. При этом $V_{p'}$ и $V^*_{p'}$ будут максимальными подгруппами из $G_{p'}$ среди всех подгрупп, нормализующихся подгруппой W_p . Итак $V_{p'} = \cap\, G_{p'}^{\,w}$, для всех $w\in W_p$. Теперь $V_{p'}= O_{p'}(G)=V^*_{p'}$ и $V=W\, O_{p'}(G)= V^*$. Итак, класс $\mathfrak{F}= \mathfrak{E}_{p'}\,\mathfrak{X}_p$ удовлетворяет условию (*).

6) Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{E}_q\,\mathfrak{X}_p$, $q\in p'$, $G=WG_{p'} \in \mathfrak{S}^{\pi}$, где W– нормальная $\mathfrak{F}$-подгруппа группы G. Пусть V и V^* – подгруппы, $\mathfrak{F}$-максимальные в G и содержащие W. Тогда $V= W_pV_q$ и $V^*=W_pV_q^*$. Так как V_q и V_q^*– максимальные подгруппы из $G_{p'}$ среди всех, нормализующихся подгруппой W_p , то V_q ,$V_q^* \subseteq O_{p'}(G)$ и будут q-силовскими подгруппами в $O_{p'}(G)$. Поэтому $V_q^*= V^x$, где $x\in O_{p'}(G)$. Итак, $V^*=WV_q^{\,x} = V^x$, и класс $\mathfrak{F} = \mathfrak{E}_q\mathfrak{X}_p$ удовлетворяет условию (*).

7) Пусть $G = WG_{p'} \in \mathfrak{S}^{\pi}$, где W – нормальная $\mathfrak{D}^p$–подгруппа группы G. Тогда $W = W_pC_w(O_p(W))$ и $G= W_pG_{p'}$. Так как $O_p(G) \subseteq G_p \subseteq W$, то $O_p(G)= O_p(W)$. Если V– произвольная подгруппа, содержащая W, то $V=W\, V_{p'}$ и $O_p(V) \subseteq W$. Тогда $O_p(V)= O_p(W)= O_p(G)$. Если V будет $\mathfrak{D}^p$–подгруппой группы G, то $V=WC_V(O_p(G))$. Если V– $\mathfrak{D}^p$–максимальная подгруппа группы G, содержащая W, то $V_p= WC_G(O_p(G))$. Итак , V– нормальна в G, и класс $\mathfrak{D}^p$ удовлетворяет условию (*).

Теорема доказана.

Теорема 3. *Если классы Фиттинга $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ удовлетворяют условию (*), то класс $\mathfrak{F} = \mathfrak{X} \cap \mathfrak{Y}$ – тоже.*

Доказательство. Пусть $G=WG_{\pi'}$, где W – нормальная $\mathfrak{F}$-подгруппа группы $G\in\mathfrak{S}^{\pi}$, а F_1 и F_2 – $\mathfrak{F}$-максимальные подгруппы группы G, содержащие W. Пусть V_1 и V_2 – $\mathfrak{X}$-максимальные подгруппы группы G, содержащие соответственно F_1 и F_2 .Так как класс $\mathfrak{X}$ удовлетворяет условию (*), то $V_1 = V_2^{\,g}$, где $g \in G$. Тогда F_1 , $F_2^{\,g} \subseteq V_1$. Теперь $V_1= W(V_1)_{\pi'}$, где W-нормальная в V_1 $\mathfrak{Y}$-подгруппа, F_1 и $F_2^{\,g}$ –$\mathfrak{Y}$ –максимальные в V_1 подгруппы, содержащие W. Так как класс $\mathfrak{Y}$ удовлетворяет условию (*), то $F_1 = F_2^{\,gv}$, где $v \in V_1$. Итак, класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию (*), и теорема доказана.

Определение 3. Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга. Группа G называется $\mathfrak{F}$-скованной, если $C_G(G_{\mathfrak{F}}) \subseteq G_{\mathfrak{F}}$.

Лемма 4. *Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{X}\mathfrak{Y}$, где $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ – классы Фиттинга и V– подгруппа π-разрешимой группы G, содержащая $G_{\mathfrak{F}}$. Если $G/G_{\mathfrak{X}}$ – $\mathfrak{Y}$-скованная группа, то $V_{\mathfrak{X}}= G_{\mathfrak{X}}$.*

Доказательство. Пусть $G_{\mathfrak{F}} \subseteq V$. Так как $G_{\mathfrak{F}}$ нормальна в V и $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$, то $[V_{\mathfrak{X}} , G_{\mathfrak{F}}]= V_{\mathfrak{X}} \cap G_{\mathfrak{F}} = (G_{\mathfrak{F}})_{\mathfrak{X}} = G_{\mathfrak{X}}$. Тогда $[V_{\mathfrak{X}} /G_{\mathfrak{X}} , G_{\mathfrak{F}}/ G_{\mathfrak{X}}]= [V_{\mathfrak{X}} ,G_{\mathfrak{F}}]/ G_{\mathfrak{X}}= G_{\mathfrak{X}} /G_{\mathfrak{X}}$ и, следовательно, подгруппы $V_{\mathfrak{X}} /G_{\mathfrak{X}}$ и $G_{\mathfrak{F}}/ G_{\mathfrak{X}}$ поэлементно перестановочны. Поэтому $V_{\mathfrak{X}} /G_{\mathfrak{X}}$ содержится в централизаторе подгруппы $G_{\mathfrak{F}}/ G_{\mathfrak{X}}$ в группе $G/ G_{\mathfrak{X}}$. Ввиду $\mathfrak{Y}$-скованности группы $G/G_{\mathfrak{X}}$ этот централизатор содержится в $G_{\mathfrak{F}}/ G_{\mathfrak{X}}$. Тогда $V_{\mathfrak{X}} /G_{\mathfrak{X}} \subseteq G_{\mathfrak{F}}/ G_{\mathfrak{X}}$. Так как $V_{\mathfrak{X}} \subseteq G_{\mathfrak{F}}$, то $G_{\mathfrak{X}} = (G_{\mathfrak{F}})_{\mathfrak{X}} = V_{\mathfrak{X}} \cap G_{\mathfrak{F}} = V_{\mathfrak{X}}$, и лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{X}\mathfrak{Y}$, где $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ – классы Фиттинга и V– подгруппа π–разрешимой группы G, содержащая $G_{\mathfrak{F}}$. Если G/G_X – $\mathfrak{Y}$-скованная группа, то:*

1) V будет $\mathfrak{F}$-подгруппой группы G тогда и только тогда, когда $V/G_{\mathfrak{X}}$ – $\mathfrak{Y}$ –подгруппа группы $G/G_{\mathfrak{X}}$;

2) подгруппа V $\mathfrak{F}$-максимальна в G тогда и только тогда, когда подгруппа $V/G_{\mathfrak{X}}$ $\mathfrak{Y}$-максимальна в $G/G_{\mathfrak{X}}$.

Доказательство. 1) Если $G_{\mathfrak{F}} \subseteq V \in \mathfrak{F}$, то по лемме 4 $V_{\mathfrak{X}} = G_{\mathfrak{X}}$ и $V/G_{\mathfrak{X}} = V/V_{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{Y}$. Итак, $V/G_{\mathfrak{X}}$ – $\mathfrak{Y}$-подгруппа группы $G/G_{\mathfrak{X}}$.

Если $G_{\mathfrak{F}} \subseteq V$ и $V/G_{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{Y}$, то по лемме 4 $V/G_{\mathfrak{X}} = V/V_{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{Y}$. Отсюда $V \in \mathfrak{F}$, и 1) доказано.

2) Пусть $V/G_{\mathfrak{X}} \subseteq L/G_{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{Y}$, и V – $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа группы G. Тогда из $G_{\mathfrak{F}} \subseteq V \subseteq L$ следует $G_{\mathfrak{F}} \subseteq L$, и тогда по лемме 4 $L_{\mathfrak{X}} = G_{\mathfrak{X}}$. Отсюда $L \in \mathfrak{F}$ и $V = L$. Тогда $V/G_{\mathfrak{X}} = L/G_{\mathfrak{X}}$.

Обратно, если $V/G_{\mathfrak{X}}$ – $\mathfrak{Y}$-максимальна в $G/G_{\mathfrak{X}}$ и $V \subseteq L \in \mathfrak{F}$, то из $G_{\mathfrak{F}} \subseteq L$ по лемме 4 следует $V/G_{\mathfrak{X}} \subseteq L/G_{\mathfrak{X}} = L/L_{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{Y}$. Итак, $V/G_{\mathfrak{X}} = L/G_{\mathfrak{X}}$. Теперь $V = L$, и 2) доказано.

Лемма доказана.

Теорема 6. *Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{X}\mathfrak{Y}$*, где $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ *– классы Фиттинга. Если $G/G_{\mathfrak{X}}$ – $\mathfrak{Y}$-скованная группа, то подгруппа V группы G будет $\mathfrak{F}$-иньектором группы G тогда и только тогда, когда $V/G_{\mathfrak{X}}$ – $\mathfrak{Y}$-иньектор группы $G/G_{\mathfrak{X}}$.*

Доказательство. Пусть V – $\mathfrak{F}$-иньектор группы G и $N/G_{\mathfrak{X}}$ – нормальная подгруппа группы $G/G_{\mathfrak{X}}$. Тогда $V \cap N$ – $\mathfrak{F}$-максимальна в N. Так как $N_{\mathfrak{F}} = N \cap G_{\mathfrak{F}} \subseteq V \cap N$, то по лемме 6.2) $V \cap N/N_{\mathfrak{X}}$ будет $\mathfrak{Y}$-максимальной подгруппой в $N/N_{\mathfrak{X}}$.

Итак, $V/N_{\mathfrak{X}} \cap N/N_{\mathfrak{X}}$ – $\mathfrak{Y}$-максимальна в $N/N_{\mathfrak{X}}$. Так как $N_{\mathfrak{X}} = G_{\mathfrak{X}}$, то $V/G_{\mathfrak{X}}$ будет $\mathfrak{Y}$-иньектором группы $G/G_{\mathfrak{X}}$.

Обратно, пусть $V/G_{\mathfrak{X}}$ – $\mathfrak{Y}$-иньектор группы $G/G_{\mathfrak{X}}$ и K – нормальная подгруппа группы G. Тогда $V/G_{\mathfrak{X}} \cap KG_{\mathfrak{X}}/G_{\mathfrak{X}} = (V \cap K)G_{\mathfrak{X}}/G_{\mathfrak{X}}$ будет $\mathfrak{Y}$-максимальной в $KG_{\mathfrak{X}}/G_{\mathfrak{X}}$ подгруппой. Так как $V \cap K \cap G_{\mathfrak{X}} = K \cap G_{\mathfrak{X}} = K_{\mathfrak{X}}$, то

$$(V \cap K)G_{\mathfrak{X}}/G_{\mathfrak{X}} \cong V \cap K/K_{\mathfrak{X}}.$$

Отсюда подгруппа $V \cap K/K_{\mathfrak{X}}$ – $\mathfrak{Y}$ -максимальна в $K/K_{\mathfrak{X}}$. Так как $K_{\mathfrak{F}} \subseteq V \cap K$, то по лемме 6.2) подгруппа $V \cap K$ будет $\mathfrak{F}$-максимальной в K. Итак, V – $\mathfrak{F}$-иньектор группы G.

Теорема доказана.

Теорема 7[2]. *Для класса π-разложимых групп $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}_{\pi} \times \mathfrak{E}_{\pi'}$ всякая π-разрешимая группа будет $\mathfrak{H}$-скованной.*

Через σ(G) обозначим множество простых делителей порядка группы G, а через $\sigma(\mathfrak{X})$ – множество простых делителей порядков групп, содержащихся в классе групп $\mathfrak{X}$.

Лемма 8. *Пусть G – π-разрешимая группа, σ=σ(G). $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}_{\pi} \times \mathfrak{E}_{\pi'}$ – класс π-разложимых групп и $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга. Если $\mathfrak{H}_{\sigma} \subseteq \mathfrak{F}_{\sigma}$, то группа G будет $\mathfrak{F}$-скованной.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно в этом случае $\mathfrak{H}_\sigma$–радикал группы G совпадает с $G_{\mathfrak{H}}$, а $\mathfrak{F}_\sigma$-радикал группы G – с $G_{\mathfrak{F}}$. Так как $G_{\mathfrak{H}} \subseteq G_{\mathfrak{F}}$, и по теореме 7 $C_G(G_{\mathfrak{H}}) \subseteq G_{\mathfrak{H}}$, то $C_G(G_{\mathfrak{F}}) \subseteq C_G(G_{\mathfrak{H}}) \subseteq G_{\mathfrak{H}} \subseteq G_{\mathfrak{F}}$, и группа G – $\mathfrak{F}$-скована.

Лемма доказана.

Следствие. *Пусть G – π-разрешимая группа, σ=σ(G) и $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга. Если $\mathfrak{S}_{\pi'} \subseteq \mathfrak{F}$ и $\sigma \cap \pi \subseteq \sigma(\mathfrak{F})$, то G – $\mathfrak{F}$-скованная группа. В частности, если $\sigma \cap \pi \subseteq \sigma(\mathfrak{F})$, то всякая π-группа будет $\mathfrak{F}$-скованной.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $\tau = \sigma \cap \pi$. Так как на множестве π–разрешимых групп всякая π–группа будет разрешимои, то $\mathfrak{F}_\tau \subseteq \mathfrak{S}_\tau$. Тогда по теореме IX.1.9 из [3] $\mathfrak{N}_\tau \subseteq \mathfrak{F}_\tau$. Поэтому $\mathfrak{N}_\tau \times \mathfrak{S}_{\pi'} \subseteq \mathfrak{F}_\tau \times \mathfrak{S}_{\pi'} \subseteq \mathfrak{F}$. По теореме 7 группа G– ($\mathfrak{N}_\pi \times \mathfrak{S}_{\pi'}$) –скована. Теперь по теореме 8 группа G – ($\mathfrak{N}_\tau \times \mathfrak{S}_{\pi'}$) –скована, и, следовательно, G– $\mathfrak{F}$–скована.

Теорема 9. *Если $\mathfrak{F} = \mathfrak{X}\mathfrak{Y}$, где $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ – классы Фиттинга удовлетворяют условию (*), и либо $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{S}_\pi$, либо $\mathfrak{S}_{\pi'} \subseteq \mathfrak{Y}$, то класс $\mathfrak{F}$ – тоже удовлетворяет условию (*).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если либо $\mathfrak{X}$, либо $\mathfrak{Y}$ – единичныи класс Фиттинга, то утверждение тривиально. Итак, ни один из этих классов не единичныи. Пусть $\rho = \sigma(\mathfrak{Y})$. Тогда ввиду π-разрешимости рассматриваемои группы, в неи всегда существует единственныи класс сопряженных ρ–холловских подгрупп.

1) Пусть $\rho \subseteq \pi$, $G=G_{\mathfrak{F}} G_{\pi'}$, и V– $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа группы G, содержащая $G_{\mathfrak{F}}$. Тогда $V= G_{\mathfrak{F}}(V \cap G_{\pi'})= G_{\mathfrak{F}}V_{\pi'}$, где $V_{\pi'}$ – π′–холловская подгруппа из V. Отсюда $V/V_{\mathfrak{X}} = G_{\mathfrak{F}} V_{\mathfrak{X}}/V_{\mathfrak{X}} \cdot V_{\pi'} V_{\mathfrak{X}}/V_{\mathfrak{X}}$. Так как $\rho \subseteq \pi$, $V/V_{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{Y}$ и $G_{\mathfrak{F}} V_{\mathfrak{X}}/V_{\mathfrak{X}} \cong G_{\mathfrak{F}} / V_{\mathfrak{X}} \cap G_{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{F}} / G_{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{Y}$, то $V/V_{\mathfrak{X}}$ и $G_{\mathfrak{F}}V_{\mathfrak{X}}/V_{\mathfrak{X}}$ будут π–группами. Тогда π′–подгруппа $V_{\pi'}V_{\mathfrak{X}}/V_{\mathfrak{X}}$ будет π–группои только тогда, когда она единичная. Отсюда $V/V_{\mathfrak{X}} = G_{\mathfrak{F}}V_{\mathfrak{X}}/V_{\mathfrak{X}}$ и $V= G_{\mathfrak{F}}V_{\mathfrak{X}}$. Так как $G=G_{\mathfrak{F}} G_{\pi'} = G_{\mathfrak{F}} \cdot G_{\mathfrak{X}} G_{\pi'}$ и $G_{\mathfrak{X}} \subseteq V_{\mathfrak{X}}$, то $V_{\mathfrak{X}}$ будет $\mathfrak{X}$-максимальнои подгруппои из $G_{\mathfrak{X}}G_{\pi'}$ среди всех $\mathfrak{X}$-подгрупп, нормализующихся подгруппои $G_{\mathfrak{F}}$ и содержащих $G_{\mathfrak{X}}$. Пусть $V_{\mathfrak{X}} \subseteq X$ – $\mathfrak{X}$-максимальную подгруппу из $G_{\mathfrak{X}}G_{\pi'}$. Наидем $V_{\mathfrak{X}}$. Пусть $R=\cap X^g$, для всех $g \in G_{\mathfrak{F}}$. Тогда R будет максимальнои из подгрупп, нормализующихся подгруппои $G_{\mathfrak{F}}$. Так как X и $G_{\mathfrak{F}}$ перестановочны, то R нормальна в $XG_{\mathfrak{F}}$ и, следовательно, $R \in \mathfrak{X}$. Итак, $R=V_{\mathfrak{X}}$. Аналогично, если V^* – $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа группы G, содержащая $G_{\mathfrak{F}}$, то $V^*= G_{\mathfrak{F}} V_{\mathfrak{X}}^*$. При этом $V_{\mathfrak{X}}^*$ содержится в некоторои $\mathfrak{X}$-максимальнои подгруппе X^* из $G_{\mathfrak{X}}G_{\pi'}$ и $G_{\mathfrak{X}} \subseteq V_{\mathfrak{X}}^*$. Пусть $R^* = \bigcap X^{*g}$ для всех $g \in G_{\mathfrak{F}}$. Тогда $R^* = V_{\mathfrak{X}}^*$. По условию теоремы класс $\mathfrak{X}$ удовлетворяет условию (*). Поэтому $X^*=X^y$, где $y \in G_{\mathfrak{X}}G_{\pi'}$. Теперь из $R^y \subseteq X^*$ следует $R^* = R^y$ и $V^* = V^y$. Итак, всякие две $\mathfrak{F}$-максимальные подгруппы группы $G = G_{\mathfrak{F}} G_{\pi'}$, содержащие $G_{\mathfrak{F}}$, сопряжены, и в случае $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{S}^\pi$ теорема верна.

2) Пусть $\mathfrak{S}_{\pi'} \subseteq \mathfrak{Y}$ и $G = G_{\mathfrak{F}} G_{\pi'}$. Тогда $G/G_{\mathfrak{X}} = G_{\mathfrak{F}}/ G_{\mathfrak{X}} \cdot G_{\pi'}G_{\mathfrak{X}} /G_{\mathfrak{X}}$ и, так как $G_{\mathfrak{F}}/ G_{\mathfrak{X}}$ и $G_{\pi'}G_{\mathfrak{X}} /G_{\mathfrak{X}}$ – ρ-группы, то $\sigma(G/ G_{\mathfrak{X}}) \subseteq \sigma(\mathfrak{Y})$. Тогда по следствию леммы 8 группа $G/ G_{\mathfrak{X}}$ будет $\mathfrak{Y}$-скованнои. Пусть V– $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа группы G, содержащая $G_{\mathfrak{F}}$. Тогда по лемме 5.2) $V_{\mathfrak{X}} = G_{\mathfrak{X}}$ и $V/ G_{\mathfrak{X}}$ будет $\mathfrak{Y}$-максимальнои подгруппои группы $G/ G_{\mathfrak{X}}$, содержащеи $G_{\mathfrak{F}}/ G_{\mathfrak{X}}$. Так как $\mathfrak{Y}$ удовлетворяет условию (*), то всякие две $\mathfrak{Y}$–максимальные подгруппы из

$G/G_{\mathfrak{X}}$ содержащие $G_{\mathfrak{F}}/G_{\mathfrak{X}}$, сопряжены. Поэтому сопряженными будут всякие две $\mathfrak{F}$-максимальные подгруппы группы G, содержащие $G_{\mathfrak{F}}$. Итак, класс $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию (*), и теорема доказана.

Следствие. Пусть $\Delta = \{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n, \ldots\}$ – такое разбиение множества всех простых чисел, в котором для некоторого j $\pi_j \supseteq \pi'$. Сопоставим каждому π_i из Δ класс Фиттинга $f(\pi_i)$. Пусть $\mathfrak{F} = \bigcap_i f(\pi_i)\, \mathfrak{E}_{\pi i} \mathfrak{E}_{\pi i'}$. Если для любого i класс $f(\pi_i)$ удовлетворяет условию (*), то класс F –тоже.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме 2.3) класс $\mathfrak{E}_{\pi i}\, \mathfrak{E}_{\pi i'}$ удовлетворяет условию (*). Так как $f(\pi_i)$ удовлетворяет условию (*), то по теореме 9 класс $f(\pi_i)\, \mathfrak{E}_{\pi i}\, \mathfrak{E}_{\pi i'}$ тоже удовлетворяет условию (*). Тогда по теореме 3 класс $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию (*).

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Сементовский В.Г.*** Признак существования и сопряженности инъекторов конечных π-разрешимых групп // Веснік ВДУ. 2001. № 3(21). С. 90-94.
2. ***Сементовский В.Г.*** Δ-нильпотентные инъекторы конечных // Вопросы алгебры, 1. Мн., 1985. С. 72-86.
3. ***Doerk K., Hawkes T.*** Finite soluble groups. Berlin-New-York, 1992. P.563-566.

S U M M A R Y

The present paper proves the existence and conjugacy of injectors of π-soluble groups for Fitting classes with some conditions and also for products andintersections of such classes.

Поступила в редакцию 1.11.2001

УДК 512.54

Е.Н. Залесская

О нелокальных классах Локетта

Введение. Локальный метод изучения конечных разрешимых групп с помощью радикалов и классов Фиттинга был предложен в 1969 году Хартли [1]. Идея локализации Хартли состоит в изучении классов групп в терминах p-групп и радикалов, определяемых отображениями (функциями Хартли) множества **P** всех простых чисел во множества классов Фиттинга. При этом класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется локальным, если существует функция Хартли f такая, что $\mathfrak{F}=LR(f)$, где $LR(f)=\mathfrak{E}_{\pi}\cap(\cap_{p\in\pi} f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'})$, $\pi=Supp(f)=\{p\in \mathbf{P} \mid f(p)\neq\varnothing\}$. Напомним, что функция Хартли f класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется

1) приведенной, если $f(p)\subseteq\mathfrak{F}$ для каждого простого p;

2) полной, если $f(p)\mathfrak{N}_p=f(p)$ для всех простых p.

Развивая локальный метод, А.Н. Скиба и Л.А. Шеметков предложили идею частичной локализации [2] для исследования классов Фиттинга.

Пусть ω – некоторое непустое множество простых чисел. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют ω-локальным [2], если $lFit\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{F}\mathfrak{N}_{\omega'}$, где $lFit\mathfrak{F}$ – локальный класс Фиттинга, порожденный $\mathfrak{F}$. Заметим, что в общем случае ω-локальный класс Фиттинга не является локальным.