УДК 378:519.6

А.И. Бочкин, В.В. Букштынов

Метод двустороннего интерполирования квадратичными функциями

При интерполировании функции f(x) на отрезке [a;b] ее приближенно заменяют многочленом

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n, \qquad (1)$$

значения которого совпадают со значениями f(x) в узлах интерполирования:

$$P_n(x_i) = f(x_i),\ i = \overline{0,n},\ x_0=a,\ x_n=b. \qquad (2)$$

После построения интерполяционного многочлена для f(x) на [a;b] возникает вопрос об оценке точности приближения функции f(x) многочленом $P_n(x)$. Остаточный член интерполирования $r_n(x) = f(x) - P_n(x)$ при условии, что на [a;b] функция f(x) n+1 раз дифференцируема, оценивается следующим образом

$$|r_n(x)| \le \frac{k|\omega(x)|}{(n+1)!} \quad \forall x \in [a;b],$$

где $k = \max\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|$, $\xi \in [a;b]$; $\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$; x_i, $i = \overline{0,n}$ – узлы интерполирования [1], [2].

Оценка погрешности интерполирования, определяемая таким образом, требует наличия определенной информации о поведении рассматриваемой функции на [a;b]. Проблемой является уже только то, что при вычислении значения параметра k необходимо решить уравнение вида $f^{(n+2)} = 0$, которое часто имеет трансцендентный вид. Поиск решения такого уравнения может потребовать времени и усилий гораздо больших, чем при всех вычислениях, необходимых для получения самого интерполяционного многочлена. Рассматриваемый способ двустороннего интерполирования как раз и позволяет избежать столь трудоемких расчетов при определении погрешностей.

Для получения достаточно хорошего приближения функции вместо построения интерполяционного многочлена высокой степени часто используют кусочную интерполяцию многочленами более низких степеней, т.е. на каждом отрезке $[x_i; x_{i+1}]$ строится свой многочлен [3], [4].

В методе двустороннего интерполирования использованы приближения квадратичными функциями (параболами), так как последовательность интерполяционных квадратичных сплайнов на равномерной сетке узлов всегда сходится к интерполируемой непрерывной функции. В этом случае интерполяционная формула Лагранжа [5], [3]:

$$f(x) \approx P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)} \qquad (3)$$

для точек x_{i-1}, x_i, x_{i+1} примет вид:

$$f_i(x) \approx P_{2,i}(x) = \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{(x_{i-1} - x_i)(x_{i-1} - x_{i+1})} f(x_{i-1}) +$$
$$+ \frac{(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})}{(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})} f(x_i) + \frac{(x - x_{i-1})(x - x_i)}{(x_{i+1} - x_{i-1})(x_{i+1} - x_i)} f(x_{i+1}) \qquad (4)$$

Согласно (4) по трем любым определенным точкам $x_{i-1} < x_i < x_{i+1}$ можно составить уравнение квадратичной функции вида:

$$y = ax^2 + bx + c, \qquad (5)$$

где коэффициенты a, b и c определяются после подстановки в $P_{2,i}(x)$ значений абсцисс и ординат трех данных точек ($y = P_{2,i}(x)$), т.е. после вычислений и преобразований формулы (4).

Таким образом для исследуемого промежутка $[x_i; x_{i+1}]$ можно определить две функции вида (5):

а) подставив в (4) координаты точек $(x_{i-1}; f(x_{i-1}))$, $(x_i; f(x_i))$ и $(x_{i+1}; f(x_{i+1}))$, получим формулу:

$$y_i^- = a_{1,i}x^2 + b_{1,i}x + c_{1,i}; \qquad (6)$$

б) подставив в (4) координаты точек $(x_i; f(x_i))$, $(x_{i+1}; f(x_{i+1}))$ и $(x_{i+2}; f(x_{i+2}))$, получим формулу:

$$f_i(x) \approx P_{2,i+1}(x) = \frac{(x - x_{i+1})(x - x_{i+2})}{(x_i - x_{i+1})(x_i - x_{i+2})} f(x_i) +$$
$$+ \frac{(x - x_i)(x - x_{i+2})}{(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} - x_{i+2})} f(x_{i+1}) + \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{(x_{i+2} - x_i)(x_{i+2} - x_{i+1})} f(x_{i+2}) \qquad (7)$$

Полученная функция:

$$y_i^+ = a_{2,i}x^2 + b_{2,i}x + c_{2,i}. \qquad (8)$$

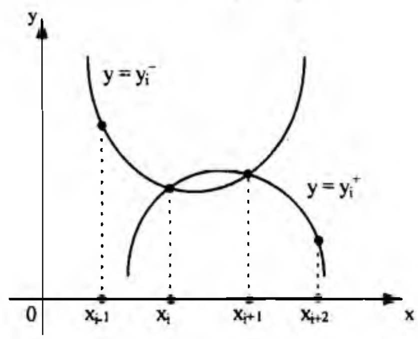

Рис. **Двустороннее приближение**

Таким образом, если для полученных функций (6) и (8) выполнено условие:

$$a_{1,i} \cdot a_{2,i} \le 0, \qquad (9)$$

т.е. коэффициенты $a_{1,i}$ и $a_{2,i}$ имеют разные знаки, и на отрезке $[x_i; x_{i+1}]$ функции y_i^- и y_i^+ образуют двустороннее приближение к интерполируемой функции f(x) (рис.).

В этом случае выполнено:

$$y_i^-(x) \le f(x) \le y_i^+(x) \qquad (10)$$

или

$$y_i^+(x) \le f(x) \le y_i^-(x), \tag{11}$$

для $\forall x \in [x_i; x_{i+1}]$ (для случая $a_{1,i} \ge 0$ и $a_{2,i} \le 0$ – (10); для – $a_{1,i} \le 0$ и $a_{2,i} \ge 0$ – (11)).

Замечание 1. *При проверке условия* (9) *допустимо:* $a_{1,i} = 0$ *или* $a_{2,i} = 0$. *В этом случае одна из парабол вырождается в прямую. Однако ситуация -* $a_{1,i} = a_{2,i} = 0$ *уже не позволит организовать двустороннее приближение, т.к. все 4 точки будут лежать на одной прямой.*

Погрешность такого двустороннего интерполирования для определения значения f(x) при $\forall x \in [x_i; x_{i+1}]$ можно оценить следующим образом:

$$\Psi \le \left|y_i^+(x) - y_i^-(x)\right|, \tag{12}$$

$$\Psi \le \left|(a_2 - a_1)x^2 + (b_2 - b_1)x + (c_2 - c_1)\right|, \ \forall x \in [x_{i-1}; x_i]. \tag{13}$$

Замечание 2. *Выполнение условия* (9) *проверяется после определения значений коэффициентов* a_1 *и* a_2, *и зависит только от взаимного расположения точек* $(x_{i-1}; f(x_{i-1}))$, $(x_i; f(x_i))$, $(x_{i+1}; f(x_{i+1}))$ *и* $(x_{i+2}; f(x_{i+2}))$. *Таким образом в некоторых случаях организовать двустороннее приближение указанным выше способом невозможно.*

Алгоритм применения метода двустороннего интерполирования квадратичными функциями

Преобразуем сначала интерполяционную формулу (4), введя следующие обозначения:

$$\alpha = \frac{f(x_{i-1})}{(x_{i-1} - x_i)(x_{i-1} - x_{i+1})}, \tag{14}$$

$$\beta = \frac{f(x_i)}{(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})}, \tag{15}$$

$$\gamma = \frac{f(x_{i+1})}{(x_{i+1} - x_{i-1})(x_{i+1} - x_i)}, \tag{16}$$

таким образом, получаем:

$$\begin{aligned} f_i(x) \approx P_{2,i}(x) = [\alpha + \beta + \gamma] \cdot x^2 - \\ - [\alpha(x_i + x_{i+1}) + \beta(x_{i-1} + x_{i+1}) + \gamma(x_{i-1} + x_i)] \cdot x + \\ + [\alpha x_i x_{i+1} + \beta x_{i-1} x_{i+1} + \gamma x_{i-1} x_i] \end{aligned} \tag{17}$$

т.е. вид уравнения (5), где

$$\alpha + \beta + \gamma = a \tag{18}$$

$$-[\alpha(x_i + x_{i+1}) + \beta(x_{i-1} + x_{i+1}) + \gamma(x_{i-1} + x_i)] = b \tag{19}$$

$$\alpha x_i x_{i+1} + \beta x_{i-1} x_{i+1} + \gamma x_{i-1} x_i = c \tag{20}$$

Алгоритм применения метода двустороннего интерполирования квадратичными функциями выглядит следующим образом: даны координаты 4 точек: $(x_0; f(x_0))$, $(x_1; f(x_1))$, $(x_2; f(x_2))$, $(x_3; f(x_3))$. Необходимо интерполировать искомую функцию параболами с двух сторон на отрезке $[x_1; x_2]$.

1. Пользуемся формулами (14) - (16), (18) для определения коэффициентов a_1 (для функции (6)) и a_2 (для функции (8)). В первом случае i принимается равным 1, во втором – 2.

2. Проверяем выполнение условия (9). Если оно не выполняется, организовать двустороннее приближение рассматриваемым способом невозможно.

3. При выполнении условия (9) определяем аналогично по формулам (19) - (20) коэффициенты b_1, b_2, c_1, c_2.

4. Определяем вид полученных функций согласно (6), (8) и конкретный вид двустороннего ограничения по (10) или (11).

5. Если ставится задача определения значения функции f(x) для $\forall x \in [x_i; x_{i+1}]$ необходимо в (10) или (11) подставить конкретное значение x. После этого согласно (12) или (13) можно оценить погрешность полученного значения f(x).

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Заварыкин В.М., Житомирский В.Г., Лапчик М.П.*** Численные методы. Учебное пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов. М.: Просвещение, 1991. С. 77-88, 91-94.
2. ***Самарский А.А., Гулин А.В.*** Численные методы. Учебное пособие для вузов. М.: Наука, 1989. С. 127-136, 140-148.
3. ***Герасимович А.И., Рысюк Н.А.*** Математический анализ. Справочное пособие. В 2-х частях. Ч. 1. Мн.: Вышэйшая школа, 1989. С. 153-157.
4. ***Корнейчук Н.П.*** Сплайны в теории приближения. М.: Наука, 1984. С. 7-40.
5. ***Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.*** Численные методы. Учебное пособие. М.: Наука, 1987. С. 35-42.

SUMMARY

The possibility of addition of the unit «Interpolating of functions» by a method of two-sided interpolating by square-law functions is considered. The method is rather simplis, is obvious in geometric representation and is one of conclusions of the classical theory of interpolating. The convenient system for account of the formulas square-law splains (parabolas) permitting at once to estimate a possibility of applicability of a method is reduced. The reduced algorithm of use by a method is calculated as on a case of the analytical representation of function, and tabulared.

Поступила в редакцию 30.03.1999