УДК 517.075.8

Ю.В. Трубников

Обобщённые метрические пространства

1. Введение

В данной работе рассматриваются особенности нового класса метрических пространств. Такие пространства можно было бы назвать ε-метрическими, т.е. аналог неравенства треугольника выполняется при более слабых по сравнению с обычными метрическими пространствами предположениях.

В таких пространствах остаётся справедливым принцип сжимающих отображений. Рассмотрены некоторые примеры.

2. Определение. Свойства операции замыкания

1. О п р е д е л е н и е. Обобщённым метрическим пространством называется пара (X, ρ), состоящая из некоторого множества X элементов (точек) и расстояния, т.е. неотрицательной, действительной функции $\rho: X \to [0, \infty)$, подчинённой следующим трём аксиомам:

1) $\rho(x,y) = 0$ при и только при $x = y$;
2) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$;
3) $\forall\varepsilon(>0)\forall b(>0)\exists\delta(>0)\forall x\forall y\forall z\{\max[\rho(x,y), \rho(y,z)]\le b\}$
$\{\min[\rho(x,y), \rho(y,z)]\le\delta \to \rho(x,z) - \rho(x,y) - \rho(y,z)\le\varepsilon\}$. (1)

Сразу же отметим тот факт, что в обычных метрических пространствах аксиома 3) выполняется при любых x, y, z, так как неравенство треугольника имеет вид: $\rho(x,z) - \rho(x,y) - \rho(y,z) \le 0$.

Рассмотрим примеры обобщённых метрических пространств. Если в гильбертовом пространстве в качестве метрики ρ взять функцию

$$\rho(x,y) = \|x-y\|^2 = (x-y,\ x-y),$$

где (.,.) – скалярное произведение, то

$$\|x-z\|^2 - \|x-y\|^2 - \|y-z\|^2 = -2(x-y, z-y) \le 2[\rho(x,y)\rho(y,z)]^{1/2},$$

т.е. свойство, сформулированное в аксиоме 3) выполняется.

2. **Лемма.** *Для любых неотрицательных* $t, s \in R$ *справедливо неравенство*

$$(t^{1/p} + s^{1/p})^p - t - s \le 0 \quad (t,s\ge 0,\ 0 < p \le 1).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $0\le s < t$ и $\mu = s/t$, тогда $1+\mu^{1/p}\le (1+\mu)^{1/p}$. Действительно, для функции $g(p) = 1 + \mu^{1/p} - (1+\mu)^{1/p}$ выполняется условие $g(1) = 0$ и

$$g'(p) = -p^{-2}\mu^{1/p}\ln\mu + p^{-2}(1+\mu)^{1/p}\ln(1+\mu)>0,$$

т.е. $g(p) < 0$ при $0<p<1$.

3. **Лемма.** *Для любых неотрицательных* $t,s \in R$ *справедливо неравенство*

$$0 \le (t^{1/p} + s^{1/p})^p - t - s \le p2^{p-1}[\min(t,s)]^{1/p}[\max(t,s)]^{1-(1/p)} \quad (0\le t,s;\ 1<p<\infty).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оценка снизу вытекает из леммы 2. Докажем оценку сверху. Пусть $\mu = [\min(t,s)]/[\max(t,s)]$, $\tau = \mu^{1/p}$, тогда

$$(t^{1/p} + s^{1/p})^p - t - s = \max(t,s)[(1+\mu^{1/p})^p - 1 - \mu] = \max(t,s)[(1+\tau)^p - 1^p - \mu] \le$$
$$\le \max(t,s)[p(1+\tau)^{p-1}\tau - \mu] \le \max(t,s)p2^{p-1}\mu^{1/p} = p2^{p-1}[\min(t,s)]^{1/p}[\max(t,s)]^{1-(1/p)}.$$

Лемма доказана.

Рассмотрим функцию $\rho: R^2\to[0,\infty)$ вида:

$$\rho(x,y) = \beta|x-y|^p \quad (\beta > 0,\ 1<p<\infty,\ x,y \in R),$$

тогда, применяя лемму 3, получаем

$$\rho(x,z) - \rho(x,y) - \rho(y,z) \le \beta(|x-y| + |y-z|)^p - \rho(x,y) - \rho(y,z) =$$
$$= \beta\{[\rho(x,y)/\beta]^{1/p} + [\rho(y,z)/\beta]^{1/p}\}^p - \rho(x,y) - \rho(y,z) \le$$

$$\leq p2^{p-1}\{\min[\rho(x,y),\rho(y,z)]\}^{1/p}\{\max[\rho(x,y),\rho(y,z)]\}^{1-(1/p)}.$$

Последнее неравенство влечёт выполнение аксиомы 3).

Аналогично функция

$$\rho(x,y) = \sum_{1\leq k\leq n} \beta_k|x_k-y_k|^{p_k} \qquad p_k\ (p_k>1,\ \beta_k>0) \tag{2}$$

определяет обобщённую метрику (т.е. метрику, для которой выполняется аксиома 3)) в пространстве R^n.

Покажем, что основные результаты теории метрических пространств имеют место и в обобщённых метрических пространствах.

Открытым шаром $B(x_0,r)$ в обобщённом метрическом пространстве (X,ρ) мы будем называть совокупность точек x, удовлетворяющих условию $\rho(x,x_0)<r$. Замкнутым шаром $B[x_0,r]$ мы назовём совокупность точек, удовлетворяющих неравенству $\rho(x,x_0) \leq r$. Множество $M\subseteq(X,\rho)$ называется ограниченным, если $\sup\rho(x,y) = d < \infty$ $(x,y\in M)$.

Напомним, что семейство β подмножеств из X называется базисом топологии τ, если $\beta\subseteq\tau$ и если каждое множество из τ есть объединение множеств, принадлежащих β. Далее напомним следующий факт [1]: пусть β–семейство подмножеств множества X и τ–множество объединений элементов из β; для того, чтобы τ было топологией, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены следующие условия:

1) для каждой пары множеств $U,V \in \beta$ и $x\in U\cap V$ существует такое $W\in\beta$, что $x\in W\subseteq U\cap V$;

2) $X = \cup\beta$.

4. **Лемма.** *В пространстве* (X,ρ) *открытые шары образуют базис соответствующей метрической топологии.*

Доказательство. Пусть $u \in B(x,r_1)\cap B(y,r_2)$. Выберем такое $\tau > 0$, чтобы выполнялись неравенства $\rho(u,x) + \tau < r_1$, $\rho(y,u) + \tau < r_2$.

Далее в соответствии с аксиомой 3) по числам τ и $\max(r_1,r_2)$ найдём такое $\delta > 0$, чтобы были выполнены неравенства

$$\rho(x,v) \leq \rho(x,u) + \rho(u,v) + \tau/2, \qquad \rho(y,v) \leq \rho(y,u) + \rho(u,v) + \tau/2, \tag{3}$$

если $\rho(u,v)\leq\delta$. Из неравенств (3) вытекает, что шар

$$B_* = \{v: \rho(u,v) < \min(\tau/2,\ \delta)\} \subseteq B(x,r_1)\cap B(y,r_2). \tag{4}$$

Действительно,

$$\rho(v,x) \leq \rho(x,u) + (\tau/2) + (\tau/2) = \rho(x,u) + \tau < r_1,$$
$$\rho(v,y) \leq \rho(y,u) + (\tau/2) + (\tau/2) = \rho(y,u) + \tau < r_2.$$

Лемма доказана.

Если A и B – подмножества обобщённого метрического пространства, то, по определению

$$\rho(A,B) = \inf \rho(a,b)\ (a\in A,\ b\in B). \tag{5}$$

Если A – подмножество обобщённого метрического пространства, то d-окрестностью A называется множество

$$S(A,d) = \{x: \rho(x,A) < d\}. \tag{6}$$

5. **Теорема.** *Обобщённое метрическое пространство нормально.*

Доказательство. Покажем прежде всего, что d-окрестность множества $A \subseteq X$ является открытым множеством. Пусть $\rho(x,A) < d$, тогда найдётся точка $y \in A$ и число $\varepsilon > 0$ такие, что $\rho(x,y) + (\varepsilon/2) < d$. По числам d и ε найдём такое δ, чтобы выполнялось неравенство

$$\rho(u,y) \leq \rho(u,x) + \rho(x,y) + (\varepsilon/2),$$

если $\rho(u,x) \leq \delta$, тогда шар

$$B_* = \{u: \rho(u,x) < \min(\varepsilon/2,\ \delta)$$

является подмножеством d–окрестности множества A. Последнее вытекает из неравенства

$\rho(u,A) \le \rho(u,y) \le \rho(u,x) + \rho(x,y) + (\varepsilon/2) < \rho(x,y) + (\varepsilon/2) + (\varepsilon/2) = \rho(x,y) + \varepsilon < d$.

Если A и B – непересекающиеся замкнутые множества, то множества

$$A_1 = \{x\colon \rho(x,A) < \rho(x,B)\} \text{ и } B_1 = \{x\colon \rho(x,B) < \rho(x,A)\}$$

являются непересекающимися окрестностями соответственно множеств A и B.

Теорема доказана.

Последовательность точек $x_1, x_2, \ldots$ обобщённого метрического пространства (X,ρ) сходится к точке $x \in X$, если последовательность действительных чисел $\rho(x,x_1), \rho(x,x_2), \ldots$ сходится к нулю. Точка x в этом случае называется пределом последовательности $x_1,x_2,\ldots$ и обозначается $\lim\limits_{k\to\infty} x_k$.

Из неравенства $\rho(a,b) \le \rho(a, x_n) + \rho(x_n,b) + \varepsilon$ при $\max[\rho(a,x_n), \rho(x_n,b)] \le \delta$, справедливого в силу аксиомы 3) и аксиомы 1) вытекает, что всякая последовательность точек обобщённого метрического пространства имеет не более одного предела.

6. **Теорема**. *Для каждого обобщённого метрического пространства* (X,ρ) *существует обобщённая метрика* ρ_1 *на множестве X, эквивалентная метрике* ρ *и ограниченная числом* 1.

Доказательство проводится обычным [2] образом.

Точка $x \in (X,\rho)$ называется точкой прикосновения множества $M \subseteq (X,\rho)$, если любая её окрестность содержит хотя бы одну точку из M. Совокупность всех точек прикосновения множества M обозначается [M] и называется замыканием этого множества.

7. **Теорема.** *Операция замыкания обладает следующими свойствами*:

1) $M \subseteq [M]$;

2) $[[M]] = [M]$;

3) *если* $M_1 \subseteq M_2$, то $[M_1] \subseteq [M_2]$;

4) $[M_1 \cup M_2] = [M_1] \cup [M_2]$.

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Докажем второе. Пусть $x \in [[M]]$. В силу аксиомы 3) по заданным ε $(0<\varepsilon<1)$ и $b = 1$ и найденному δ выберем элемент $y \in [M]$ так, чтобы выполнялось неравенство $\rho(x,y) < \min(\delta,\varepsilon)$, тогда $\rho(x,z) \le \rho(x,y) + \rho(y,z) + \varepsilon < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon$. В силу произвольности ε в любой ε-окрестности точки $x \in [[M]]$ найдётся точка $z \in M$, т.е. $x \in [M]$.

Третье свойство очевидно.

Если, далее, $x \in [M_1 \cup M_2]$, то x содержится по крайней мере в одном из множеств $[M_1]$ или $[M_2]$. Действительно, предположив противное, получаем

$$\exists\varepsilon_1[B(x,\varepsilon_1)\cap M_1] = \varnothing, \quad \exists\varepsilon_2[B(x,\varepsilon_2)\cap M_2 = \varnothing,$$

но тогда

$$B(x, \min(\varepsilon_1,\varepsilon_2))\cap(M_1\cup M_2) = \varnothing.$$

Теорема доказана.

Точка $x \in (X, \rho)$ называется предельной точкой множества $M \subseteq (X,\rho)$, если любая её окрестность содержит по крайней мере одну точку множества M, не совпадающую с точкой x. Точка $x \in M$ называется изолированной точкой этого множества, если $\exists\varepsilon(>0)\{[B(x,\varepsilon)\backslash x]\cap M = \varnothing\}$. Таким образом, всякая точка прикосновения множества M есть либо предельная, либо изолированная точка этого множества.

Множество $M \subseteq (X,\rho)$ называется замкнутым, если $M = [M]$.

8. **Лемма**. *Всякая сходящаяся последовательность* $\{x_n\}$ ($\lim x_n = x_*$) точек *обобщённого метрического пространства* (X,ρ) *фундаментальна*.

Доказательство. По заданным $\varepsilon > 0$ и $b = \varepsilon$ найдём в соответствии с аксиомой 3) $\delta = \delta(\varepsilon,b)$, тогда

$$\exists n_*\forall n(\ge n_*)\ \rho(x,x_*) < \min(\varepsilon,\delta),$$

но тогда

$$\rho(x_n,x_m) - \rho(x_n,x_*) - \rho(x_*, x_m) \le \varepsilon$$

и

$$\rho(x_n,x_m) \le \rho(x_n,x_*) + \rho(x_*, x_m) + \varepsilon < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon \ (m,n \ge n_*).$$

Последнее неравенство означает фундаментальность последовательности $\{x_n\}$.

Лемма доказана.

Если в пространстве (X,ρ) любая фундаментальная последовательность точек сходится, то это пространство называется полным. В обобщённом метрическом пространстве (X,ρ) остаётся справедливой теорема о вложенных шарах.

9. **Теорема**. *Для того чтобы обобщённое метрическое пространство* (X,ρ) *было полным, необходимо и достаточно, чтобы в нём всякая последовательность вложенных друг в друга замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю, имела непустое пересечение.*

Доказательство. Необходимость. Пусть пространство (X,ρ) полно и пусть $B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \ldots$ – последовательность вложенных друг в друга замкнутых шаров. Покажем прежде всего, что замкнутый шар является замкнутым множеством. Действительно, пусть $x \in [B[x_0,r]]$, покажем, что $x \in B[x_0,r]$. Для этого по произвольному $\varepsilon \in (0, b)$ и числу $b = r$ выберем $y \in B[x_0,r]$ так, чтобы выполнялось неравенство $\rho(x,y) < \min(\delta,\varepsilon)$, тогда $\rho(x,x_0) - \rho(x,y) - \rho(y,x_0) \le \varepsilon$ и, следовательно, $\rho(x,x_0) \le \varepsilon + r + \varepsilon = 2\varepsilon + r$. В силу произвольности ε получаем, что $\rho(x,x_0) \le r$.

Пусть, далее, r_n – радиус, а x_n – центр шара B_n. Последовательность центров $\{x_n\}$ фундаментальна, так как $\rho(x_n,x_m) < r_n$ при $m>n$, а $r_n \to 0$ при $n \to \infty$. Так как X полно, то существует $x = \lim x_n$ $(n\to\infty)$, тогда

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Действительно, шар B_n содержит все точки последовательности $\{x_k\}$, за исключением, быть может, точек $x_1,x_2,\ldots, x_{n-1}$. Таким образом, x является точкой прикосновения для каждого шара B_n. Но так как B_n– замкнутое множество, то $x \in B_n$ для всех n.

Достаточность. Пусть $\{x_n\}$ – фундаментальная последовательность. Докажем, что она имеет предел. В силу фундаментальности

$$\exists n_1 \forall n(\ge n_1)\rho(x_n,x_{n1}) < 1/2.$$

Пусть $B_1 = B[x_{n1}, 1]$. Выберем затем x_{n2} из $\{x_n\}$ так, чтобы было $n_2>n_1$ и

$$\forall n(\ge n_2)\rho(x_n,x_{n2}) < 2^{-2},$$

далее, обозначим $B_2=B[x_{n2}, 2^{-1}]$. Если точки x_{n1} , x_{n2} ,..., x_{nk} выбраны, причём $n_1<n_2<\ldots<n_k$, то выберем точку $x_{n\ k+1}$ так, чтобы было $n_{k+1}>n_k$ и

$$\forall n(\ge n_{k+1})\rho(x_n, x_{n\ k+1}) < 2^{-(k+1)}.$$

Обозначив $B_{k+1} = B[x_{n\ k+1}, 2^{-k}]$, получим последовательность замкнутых шаров B_k, вложенных друг в друга, причём шар B_k имеет радиус $2^{-(k-1)}$. Эта последовательность шаров имеет, по предположению, общую точку; обозначим её x. Очевидно, что $x = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$.

Далее по произвольным $\varepsilon\in(0,b)$ и числу $b=1$ в соответствии с аксиомой 3) выберем k_* так, чтобы выполнялись неравенства

$$\forall k(\ge k_*)\rho(x_{n\,k}, x) < \min(\delta,\varepsilon);\quad 2^{-k_*} < \varepsilon,$$

где δ определяется аксиомой 3). Так как

$$\forall n(\ge n_{k_*})\ \rho(x_n,\ x_{nk_*}) < 2^{-k_*} < \varepsilon,$$

то при всех $n \ge n_{k_*}$

$$\rho(x_n,x) - \rho(x_n, x_{n_k}) - \rho(x_{n_k}, x) \le \varepsilon,$$

т.е. $\rho(x_n,x) \le 3\varepsilon$.

Из произвольности ε вытекает, что $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Теорема доказана.

Пусть A и B – два множества в (X,ρ). Множество A называется плотным в B, если $[A] \supset B$. В частности, множество A называется всюду плотным, если $[A] = X$. Множество A называется нигде не плотным, если оно не плотно ни в одном шаре, т.е. если в каждом шаре $B \subset (X,\rho)$ содержится другой шар B' такой, что $B' \cap A = \varnothing$.

В обобщённых метрических пространствах справедлива теорема Бэра.

Напомним, что множество $E \subset (X,\rho)$ называется множеством первой категории, если E можно представить в виде объединения счётного семейства нигде не плотных множеств. Множество $T \subseteq (X,\rho)$, не являющееся множеством первой категории, называется множеством второй категории в (X,ρ).

10. **Теорема.** *Обобщённое полное метрическое пространство* (X,ρ) *есть множество второй категории в себе.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. что X – множество первой категории, так что

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k,$$

где E_k нигде не плотны. Так как E_1 нигде не плотно, найдётся шар $B[x_1,\varepsilon_1]$ такой, что

$$B[x_1,\varepsilon_1]\cap E_1 = \varnothing.$$

Так как E_2 нигде не плотно, то в шаре $B[x_1, \varepsilon_1/3]$ найдётся шар $B[x_2,\varepsilon_2]$ такой, что $B[x_2,\varepsilon_2]\cap E_2 = \varnothing$ $(\varepsilon_2 \le \varepsilon_1/3)$. Таким образом,

$$B[x_n,\varepsilon_n]\cap(E_1\cup E_2\cup\ldots\cup E_n) = \varnothing \ (\varepsilon_n \le \varepsilon_{n-1}/3).$$

Ввиду того, что шар $B[x_n,\varepsilon_n/3]$ содержит все последующие шары, будет выполняться неравенство

$$\rho(x_{n+p},x_n) \le \varepsilon_n/3 \ (p=1,2,3,\ldots).$$

Так как $\varepsilon_n \to 0$, получаем, что последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна. Пусть $x=\lim x_n$ $(n \to \infty)$. По числам $\varepsilon=\varepsilon_n/3$, $b=1$ найдём δ такое, чтобы из неравенства

$$\rho(x,x_{n+p}) < \min(\delta,\varepsilon)$$

вытекало неравенство

$$\rho(x,x_n) \le \rho(x, x_{n+p}) + \rho(x_{n+p},x_n) + \varepsilon \le (\varepsilon_n/3) + (\varepsilon_n/3) + (\varepsilon_n/3) = \varepsilon_n,$$

т.е. $x \in B[x_n,\varepsilon_n]$. Следовательно,

$$\forall n(\ge 1)\ x \notin \bigcup_{j=1}^{n} E_j.$$

С другой стороны $x \in \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} E_j$, т.е. существует m такое, что $x \in E_m$. Полученное противоречие доказывает теорему.

11. ***Следствие***. Если обобщённое метрическое пространство (X,ρ) допускает представление $X= \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$, то хотя бы одно из множеств E_k не является нигде не плотным, т.е. содержит некоторый шар.

Доказательство. Отрицание понятия «нигде не плотное множество» имеет вид $\exists B\forall B_1(\subseteq B)B_1 \cap E_{k\,m} \ne \varnothing$. Пусть B – шар с указанным свойством. Для любой точки $x\in B$ построим последовательность замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю, содержащих точку x, тогда

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$$

и $x \in E_{km}$, т.е. $E_{km} \supset B$.

Теорема доказана.

12. О п р е д е л е н и е. Отображение обобщённых метрических пространств f: $(X,\rho_1) \to (Y,\rho_2)$ называется изометрией, если f биективно и

$$\rho_2[f(x),f(y)] = \rho_1(x,y) \ (x,y \in X).$$

Обобщённые метрические пространства называются изометричными, если между ними существует изометрия. Пополнением обобщённого метрического пространства (X,ρ_1) называется полное обобщённое метрическое пространство (Y, ρ_2) такое, что (X,ρ_1) является его всюду плотным подпространством.

13. **Теорема**. *Для любого обобщённого метрического пространства существует пополнение.*

Д о к а з а т е л ь с т в о проводится обычным образом.

3. Существование неподвижной точки у сжимающего оператора

14. О п р е д е л е н и е. Оператор A:$X \to X$, где X – обобщённое метрическое пространство, называется сжимающим, если

$$\rho(Ax, Ay) \le q\rho(x,y) \ (0 \le q < 1). \qquad (7)$$

15. **Теорема**. Пусть оператор A преобразует в себя полное обобщённое метрическое пространство (X,ρ) и является сжимающим. Тогда уравнение

$$x = Ax \qquad (8)$$

имеет в X единственное решение x_*. К этому решению сходятся последовательные приближения

$$x_{n+1} = Ax_n \ (n = 0, 1, 2,...) \qquad (9)$$

при любом начальном приближении $x_0 \in X$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Числовая последовательность $\alpha_n = \rho(x_n, x_{n-1})$ $(n = 1, 2,...)$ является в силу условия (7) не возрастающей; пусть α_* – её предел. Кроме того

$$\alpha_{n+1} \le q\alpha_n. \qquad (10)$$

Перейдя к пределу при $n \to \infty$ в обеих частях последнего неравенства, получаем $\alpha_* \le q\alpha_*$ и, следовательно, $\alpha_* = 0$.

Далее, пусть $\varepsilon>0$ – произвольно; в соответствии с аксиомой 3) найдём $\delta = \delta(\varepsilon/3, 1)$, т.е. возьмём $b = 1$, тогда

$$\exists n_* \forall n(\ge n_*) \rho(Ax_n, x_n) \le \min[\varepsilon/3, \delta(\varepsilon/3,1)], \qquad (11)$$

т.е.

$$\forall n(\ge n_*) \forall x \{x: \rho(Ax, Ax_n) \le 1\}$$

выполняется неравенство

$$\rho(Ax, x_n) - \rho(Ax, Ax_n) - \rho(Ax_n, x_n) \le \varepsilon/3. \qquad (12)$$

Покажем, что любой шар

$$B_n = \{x: \rho(x,x_n) \le 2\varepsilon[3(1-q)]^{-1} < 1 \} \ (n \ge n_*)$$

оператор A преобразует в себя. Действительно, из неравенств (12) и (11) вытекает, что

$$\rho(Ax, x_n) \le \rho(Ax, Ax_n) + \rho(Ax_n, x_n) + \varepsilon/3 \le 2\varepsilon q[3(1-q)]^{-1} + (\varepsilon/3) + (\varepsilon/3) = 2\varepsilon[3(1-q)]^{-1}.$$

Инвариантность шара B_n означает, что

$$\rho(x_{n+m}, x_n) \le 2\varepsilon[3(1-q)] \ (n \ge n_*, \ m = 1,2,...).$$

Следовательно, последовательность (9) точек обобщённого метрического пространства фундаментальна. Покажем, что её предел x_* будет решением уравнения (8). Заметим, что $Ax_* \in B_n$ $(n \ge n_*+1)$. Действительно,

$$\rho(Ax_*, x_n) = \rho(Ax_*, Ax_{n-1}) \le q\rho(x_*, x_{n-1}) \le 2\varepsilon q[3(1-q)] < 2\varepsilon[3(1-q)]^{-1} \ (n-1 > n_*).$$

Далее $\exists k \forall n(\ge k)$

$$\rho(x_*, x_n) \le \min\{\varepsilon, \delta(\varepsilon, 2\varepsilon[3(1-q)]^{-1})\},$$

где δ находится в соответствии с аксиомой 3), но тогда $\forall n(\ge\max(n_*+1, k))$

$$\rho(x_*, Ax_*) - \rho(x_*, x_n) - \rho(x_n, Ax_*) \le \varepsilon,$$

т.е. $\rho(x_*, Ax_*) \le \rho(x_*, x_n) + \rho(x_n, Ax_*) + \varepsilon \le \varepsilon + 2\varepsilon[3(1-q)]^{-1} + \varepsilon = 2\varepsilon + 2\varepsilon[3(1-q)]^{-1}$.

В силу произвольности ε получаем

$$\rho(x_*, Ax_*) = 0.$$

Из аксиомы 1) вытекает, что $x_* = Ax_*$.

16. Определение. Оператор A: $X \to X$ называется обобщённым сжатием, если

$$\rho(Ax, Ay) \le q(\alpha,\beta)\rho(x,y) \quad (\alpha\le\rho(x,y)\le\beta), \tag{13}$$

причём при $0 < \alpha \le \beta < \infty$ выполняется условие $q(\alpha,\beta) < 1$.

17. **Теорема.** Пусть оператор A преобразует полное обобщённое метрическое пространство в себя и является обобщённым сжатием. Тогда уравнение (8) имеет в X единственное решение x_*. К этому решению сходятся последовательные приближения, определяемые равенством (9) при любом начальном приближении $x_0 \in X$.

Доказательство теоремы 17 проводится аналогично. Внесём необходимые уточнения. Если $\alpha_* > 0$, то при достаточно больших k и при всех $m = 1,2,\ldots$ в силу (13) выполнено неравенство

$$\alpha_{k+m} \le [q(\alpha_*, \alpha_*+1)]^m(\alpha_*+1),$$

но в этом случае $\alpha_*=0$.

Неравенство, аналогичное неравенству (12), доказывается так же:

$$\rho(Ax, x_n) \le \rho(Ax, Ax_n) + \rho(Ax_n, x_n) + \varepsilon/3, \tag{14}$$

т.е. (14) выполнено по произвольному $\varepsilon>0$ при всех n, начиная с некоторого.

Возьмём далее произвольное $\mu > 0$, положим

$$q_* = \max\{1/2, q(\mu, 2\mu)\},$$

и пусть

$$2\varepsilon[3(1-q_*)]^{-1} = 2\mu,$$

тогда шар

$$B_n = \{x: \rho(x, x_n) \le 2\varepsilon[3(1-q_*)]^{-1} = 2\mu\}$$

оператор A преобразует в себя. Рассмотрим два случая. Пусть $0 < \rho(x, x_n) < \mu$, тогда

$$\rho(Ax, x_n) \le \rho(Ax, Ax_n) + 2\varepsilon/3 < \mu + 2\varepsilon/3 = \mu + 2\mu(1-q_*) = $$
$$= 3\mu - 2\mu q_* \le 3\mu - 2\mu(1/2) = 2\mu.$$

Если же $\mu \le \rho(x, x_n) \le 2\mu$, то

$$\rho(Ax, Ax_n) \le q(\mu, 2\mu)2\varepsilon[3(1-q_*)]^{-1} + (2\varepsilon/3) \le 2\varepsilon q_*[3(1-q_*)]^{-1} + (2\varepsilon/3) = 2\mu.$$

Из инвариантности шара B_n вытекает фундаментальность последовательности $\{x_n\}$. Завершается доказательство теоремы 17 аналогично доказательству теоремы 15.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Данфорд Н., Шварц Дж.Т.*** Линейные операторы, т. 1. М.: Мир, 1962. С. 21.
2. ***Энгелькинг Р.*** Общая топология. М.: Мир, 1986. С. 373.

SUMMARY

In this paper the author presents a some generalization of the theory of the metric spaces.

Поступила в редакцию 12.09.1999