УДК 512.548

А.М. Гальмак

Многообразия $\mathfrak{X}(n)$

Значение многообразий $\mathfrak{X}(n)$ в теории n-арных групп определяется тем, что многие известные многообразия n-арных групп имеют вид $\mathfrak{X}(n)$ для подходящего многообразия групп $\mathfrak{X}$.

Определение. Если $\mathfrak{X}$ – множество групп, то для любого $n \geq 3$ положим

$$\mathfrak{X}(n) = \{< A, [\ ] > \mid \forall a \in A, < A, @ > \in \mathfrak{X}\},$$

$$\mathfrak{X}'(n) = \{< A, [\ ] > \mid \exists a \in A, < A, @ > \in \mathfrak{X}\}.$$

Отметим, что множество $\mathfrak{X}(n)$ может быть пустым для непустого множества $\mathfrak{X}$. Если $\mathfrak{X} \neq \varnothing$, то $\mathfrak{X}'(n) \neq \varnothing$ и верно включение $\mathfrak{X}(n) \subseteq \mathfrak{X}'(n)$.

Ясно, что многообразие всех n-арных групп совпадает с множеством $\mathfrak{G}(n)$, где $\mathfrak{G}$ – многообразие всех групп.

Монк и Сиосон, доказав [1], что множество $\mathfrak{G}(n)$ всех n-арных групп, рассматриваемых как универсальные алгебры $< A, [\ ], ^{-} >$ типа $< n, 1 >$, замкнуто относительно гомоморфных образов, прямых произведений и подалгебр, впервые отметили, что множество $\mathfrak{G}(n)$ является многообразием сигнатуры $\{[\ ], ^{-}\}$. Первая же система тождеств, определяющих многообразие $\mathfrak{G}(n)$ была получена Гляйхгевихтом и Глазеком [2] гораздо раньше. Другие системы тождеств, определяющих $\mathfrak{G}(n)$ можно найти в [3 - 5].

Многообразие $\mathfrak{G}(n)$ всех n-арных групп замечательно тем, что оно обладает следующими четырьмя свойствами, первые три из которых установлены в [1], а четвёртое – в [6]:

1) является мальцевским, т.е. на любой n-арной группе любые две конгруэнции перестановочны;

2) является конгруэнц-модулярным, т.е. любая n-арная группа имеет модулярную решётку конгруэнций;

3) является конгруэнц-регулярным, т.е. для каждой n-арной группы любые две конгруэнции, имеющие общий смежный класс, совпадают;

4) является конгруэнц-униформным, т.е. для каждой n-арной группы все смежные классы по одной и той же произвольной конгруэнции имеют одинаковую мощность.

Согласно теореме Биркгофа ([7], теорема VII.3.4), свойство 2) является следствием 1). Свойство 2), ввиду теоремы Хагемана [8], следует также и из 3). В свою очередь свойство 3), ввиду теоремы 32.4 [9], вытекает из 4).

Теорема 1. *Если $\mathfrak{X}$ - абстрактный класс групп, то справедливы следующие утверждения:*

1) $\mathfrak{X}'(n) = \mathfrak{X}(n) = \{< A, [\ ] > \mid < A_0, * > \in \mathfrak{X}\}$,

где $< A_0, * >$ – соответствующая группа Поста;

2) $\mathfrak{X}(n)$ – *абстрактный класс n-арных групп.*

Пример. Пост установил ([10], с. 245), что n-арная группа $\langle A, [\ ] \rangle$ является полуабелевой тогда и только тогда, когда её соответствующая группа $\langle A_0, * \rangle$ – абелева. Поэтому многообразие всех полуабелевых n-арных групп совпадает с классом $\mathfrak{A}(n)$, где $\mathfrak{A}$ – многообразие всех абелевых групп.

Можно показать, что многообразие всех абелевых тернарных групп нельзя представить в виде $\mathfrak{X}(3)$ для некоторого многообразия групп $\mathfrak{X}$. Таким образом, не для всякого многообразия $\mathfrak{M}$ n-арных групп существует многообразие групп $\mathfrak{X}$ такое, что $\mathfrak{M} = \mathfrak{X}(n)$.

Предложение 1. Если абстрактный класс групп $\mathfrak{X}$ замкнут относительно подгрупп, то абстрактный класс $\mathfrak{X}(n)$ n-арных групп также замкнут относительно n-арных подгрупп.

Доказательство. Пусть $\langle A, [\ ] \rangle \in \mathfrak{X}(n)$, и $\langle B, [\ ] \rangle$ – n-арная подгруппа в $\langle A, [\ ] \rangle$. Согласно определению, $\langle A, @ \rangle \in \mathfrak{X}$ для любого $a \in B$. Так как $\langle B, @ \rangle$ – подгруппа группы $\langle A, @ \rangle$, то из замкнутости класса $\mathfrak{X}$ относительно подгрупп вытекает $\langle B, @ \rangle \in \mathfrak{X}$, откуда получаем $\langle B, [\ ] \rangle \in \mathfrak{X}(n)$. Предложение доказано.

Лемма 1. *Если τ – гомоморфизм n-арной группы $\langle A, [\ ] \rangle$ на n-арную группу $\langle B, \lfloor\ \rfloor \rangle$, то τ – гомоморфизм группы $\langle A, @ \rangle$ на группу $\langle B, \tau(a) \rangle$. В частности, если τ – изоморфизм $\langle A, [\ ] \rangle$ на $\langle B, \lfloor\ \rfloor \rangle$, то τ – изоморфизм $\langle A, @ \rangle$ на $\langle B, \tau(a) \rangle$.*

Доказательство. Легко проверяется, что если $a_1 \ldots a_{n-2}$ – обратная последовательность для a, то $\tau(a_1) \ldots \tau(a_{n-2})$ – обратная последовательность для $\tau(a)$. Поэтому для любых $x, y \in A$ верно

$$\tau(x @ y) = \tau([xa_1 \ldots a_{n-2}y]) =$$
$$= \lfloor \tau(x)\tau(a_1) \ldots \tau(a_{n-2})\tau(y) \rfloor = \tau(x) \, \tau(a) \, \tau(y),$$

т. е. τ – гомоморфизм $\langle A, @ \rangle$ на $\langle B, \tau(a) \rangle$. Лемма доказана.

Предложение 2. Если множество групп $\mathfrak{X}$ замкнуто относительно гомоморфных образов, то множество $\mathfrak{X}(n)$ n-арных групп также замкнуто относительно гомоморфных образов.

Доказательство. Пусть $\langle A, [\ ] \rangle \in \mathfrak{X}(n)$, и τ гомоморфизм $\langle A, [\ ] \rangle$ на $\langle B, \lfloor\ \rfloor \rangle$. Согласно определению, $\langle A, @ \rangle \in \mathfrak{X}$ для любого $a \in A$, а по лемме 1, $\langle B, \tau(a) \rangle$ – гомоморфный образ группы $\langle A, @ \rangle$ при гомоморфизме τ. Так как по условию $\langle B, \tau(a) \rangle \in \mathfrak{X}$, то $\langle B, \lfloor\ \rfloor \rangle \in \mathfrak{X}(n)$. Предложение доказано.

Лемма 2. *Пусть $\langle A_i, [\ ]_i \rangle$ – n-арные группы ($i \in I$), a_i – фиксированные элементы из A_i, $c_1^{(i)} \ldots c_{n-2}^{(i)}$ –обратная последовательность для a_i($c_1^{(i)}, \ldots, c_{n-2}^{(i)} \in A$). Пусть также $a, c_j \in \prod A_i$, где*

$$a(i) = a_i \in A_i, \quad c_j(i) = c_j^{(i)} \in A_i \quad (j = 1, \ldots, n-2).$$

Тогда $c_1 \ldots c_{n-2}$ – обратная последовательность для элемента a в n-арной группе

$$\prod \langle A_i, [\ ]_i \rangle = \langle \prod A_i, [\ ] \rangle.$$

Доказательство. Так как

$$[ac_1 \ldots c_{n-2}a](i) = [a(i)c_1(i) \ldots c_{n-2}(i)a(i)]_i =$$

$$= [\underbrace{a_i c_1^{(i)} \dots c_{n-2}^{(i)}}_{\text{нейтр}} a_i]_i = a_i = a(i),$$

то

$$[ac_1 \dots c_{n-2}a] = a.$$

Следовательно, $ac_1 \dots c_{n-2}$ – нейтральная последовательность, а значит, $c_1 \dots c_{n-2}$ – обратная последовательность для элемента a. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть* $< A_i, [\ ]_i >$ – *n-арные группы* ($i \in I$), a_i – *фиксированные элементы из* A_i, $a \in \prod A_i$, *где* $a(i) = a_i \in A_i$. *Тогда*

$$< \prod A_i, @ > = \prod < A_i, (a_i) >.$$

Доказательство. Для сокращения записей положим $A = \prod A_i$. Тогда доказываемое равенство примет вид

$$< A, @ > = < A, \circ >,$$

при этом операция @ определяется по правилу

$$x @ y = [xc_1 \dots c_{n-2}y], \ x, y \in A,$$

где $< A, [\ ] > = \prod < A_i, [\ ]_i >$, $c_1 \dots c_{n-2}$ – обратная последовательность, определённая в лемме 2, а операция $\circ$ определяется покомпонентно следующим образом

$$(x \circ y)(i) = x(i) (a_i) y(i).$$

Так как для любых $x, y \in A$ и любого $i \in I$ верно

$$(x @ y)(i) = [x c_1 \dots c_{n-2}y](i) = [x(i)c_1(i) \dots c_{n-2}(i)y(i)]_i =$$

$$= [x(i) c_1^{(i)} \dots c_{n-2}^{(i)} y(i)]_i = x(i) (a_i) y(i) = (x (a_i) y)(i),$$

т. е.

$$(x @ y)(i) = (x (a_i) y)(i),$$

то

$$x @ y = x \circ y.$$

Лемма доказана.

Следствие 1. Пусть $< A_1, [\ ]_1 >, \dots, < A_k, [\ ]_k >$ – n-арные группы, $a = (a_1, \dots, a_k)$, где a_i – фиксированные элементы A_i ($i = 1, \dots, k$). Тогда

$$< A_1 \times \dots \times A_k, @ > = < A_1 (a_1) > \times \dots \times < A_k, (a_k) >.$$

Предложение 3. Если абстрактный класс групп $\mathfrak{X}$ замкнут относительно прямых произведений, то абстрактный класс $\mathfrak{X}(n)$ n-арных групп также замкнут относительно прямых произведений.

Доказательство. Если $< A_i, [\ ]_i > \in \mathfrak{X}(n)$, где $i \in I$, то согласно определению, $< A_i, (a_i) > \in X$ для любого $a_i \in A_i$. Так как класс $\mathfrak{X}$ замкнут относительно прямых произведений, то

$$\prod < A_i, (a_i) > \in \mathfrak{X},$$

откуда, учитывая лемму 3, получаем

$$< \prod A_i, @ > \in \mathfrak{X}$$

для некоторого $a \in \prod A_i$. Следовательно,

$$\prod < A_i, [\ ]_i > = < \prod A_i, [\ ] > \in \mathfrak{X}(n).$$

Предложение доказано.

Следующая теорема является следствием предложений 1, 2 и 3.

Теорема 2. *Если* $\mathfrak{X}$ *является многообразием групп, то* $\mathfrak{X}(n)$ *является многообразием n-арных групп.*

Лемма 4. *Если* $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{M}$, *то* $\mathfrak{X}(n) \subseteq \mathfrak{M}(n)$, $\mathfrak{X}'(n) \subseteq \mathfrak{M}'(n)$.

Доказательство. Если

$$< A, [\ ] > \in \mathfrak{X}(n) \ (< A, [\ ] > \in \mathfrak{X}'(n),$$

то $< A, ⓐ > \in \mathfrak{X}$ для любого $a \in A$ (для некоторого $a \in A$), откуда и из $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{M}$ следует $< A, ⓐ > \in \mathfrak{M}$ для любого $a \in A$ (для некоторого $a \in A$). Тогда

$$< A, [\ ] > \in \mathfrak{M}(n) \quad (< A, [\ ] > \in \mathfrak{M}'(n)),$$

и значит, $\mathfrak{X}(n) \subseteq \mathfrak{M}(n)$, $\mathfrak{X}'(n) \subseteq \mathfrak{M}'(n)$. Лемма доказана.

Лемма 5. *Если $\mathfrak{M}$ – абстрактный класс групп и $\mathfrak{X}'(n) \subseteq \mathfrak{M}'(n)$, то $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{M}$.*

Доказательство. Пусть $< A, * > \in \mathfrak{X}$ и $< A, [\ ] >$ – n-арная группа, производная от группы $< A, * >$. Так как $< A, * > = < A, ⓔ > \in \mathfrak{X}$, где e – единица группы $< A, * >$, то $< A, [\ ] > \in \mathfrak{X}'(n)$, откуда и из $\mathfrak{X}'(n) \subseteq \mathfrak{M}'(n)$ следует $< A, [\ ] > \in \mathfrak{M}'(n)$. А так как $\mathfrak{M}$ – абстрактный класс групп, то $\mathfrak{M}'(n) = \mathfrak{M}(n)$. Следовательно, $< A, [\ ] > \in \mathfrak{M}(n)$, откуда $< A, ⓐ > \in \mathfrak{M}$ для любого $a \in A$, в частности при $a = e$, имеем $< A, ⓔ > = < A, * > \in \mathfrak{M}$, и значит $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{M}$. Лемма доказана.

Леммы 4 и 5 позволяют сформулировать следующее

Предложение 4. Если $\mathfrak{M}$ – абстрактный класс групп, то $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{M}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{X}'(n) \subseteq \mathfrak{M}'(n) = \mathfrak{M}(n)$.

Следствие 2. Если $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{M}$ – абстрактные классы групп, то $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{M}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{X}(n) \subseteq \mathfrak{M}(n)$.

Следствие 3. Если $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{M}$ – абстрактные классы групп, то $\mathfrak{X} = \mathfrak{M}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{X}(n) = \mathfrak{M}(n)$.

С помощью теоремы 2 и следствия 2 можно получать n-арные аналоги различных групповых результатов.

Предложение 5. Если $\mathfrak{B}_2$ – бернсайдово многообразие групп периода 2, то $\mathfrak{B}_2(n)$ – полуабелево многообразие n-арных групп.

Доказательство. По теореме 2, $\mathfrak{B}_2(n)$ – многообразие n-арных групп, а из $\mathfrak{B}_2 \subseteq \mathfrak{A}$, согласно следствию 2, вытекает $\mathfrak{B}_2(n) \subseteq \mathfrak{A}(n)$. Так как многообразие $\mathfrak{A}(n)$ совпадает с классом всех полуабелевых n-арных групп (пример), то $\mathfrak{B}_2(n)$ – полуабелево. Предложение доказано.

Предложение 6. Если для многообразия групп $\mathfrak{X}$ многообразие $\mathfrak{X}(n)$ n-арных групп полуабелево, то либо $\mathfrak{X} = \mathfrak{A}$ либо $\mathfrak{X} = \mathfrak{A}_m$ для некоторого m.

Доказательство. Так как класс всех полуабелевых n-арных групп совпадает с классом $\mathfrak{A}(n)$ (пример), то из условия $\mathfrak{X}(n) \subseteq \mathfrak{A}(n)$, применяя следствие 2, получаем $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{A}$. Из этого включения, в силу соответствующего бинарного результата следует $\mathfrak{X} = \mathfrak{A}$ или $\mathfrak{X} = \mathfrak{A}_n$. Предложение доказано.

Следующий результат является n-арным аналогом теоремы А.Ю. Ольшанского о существовании неабелевого многообразия групп, все конечные группы которого абелевы [11].

Теорема 3. *Существует неполуабелево многообразие n-арных групп, все конечные n-арные группы которого полуабелевы.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}$ – многообразие из теоремы А.Ю. Ольшанского. Тогда по теореме 2, $\mathfrak{M}(n)$ – многообразие n-арных групп. Если допустить полуабелевость $\mathfrak{M}(n)$, то $\mathfrak{M}(n) \subseteq \mathfrak{A}(n)$, откуда, применяя следствие 2, получаем $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{A}$, что противоречит неабелевости многообразия $\mathfrak{M}$. Следовательно, многообразие $\mathfrak{M}(n)$ – неполуабелево. Предположим, что конечная n-арная группа $< A, [\ ] > \in \mathfrak{M}(n)$ является полуабелевой. Тогда для любого $a \in A$ конечная группа $< A, ⓐ > \in \mathfrak{M}$ является абелевой, что невозможно. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Monk J.D., Sioson F.M.*** On the general theory of m-groups // Fund. Math. 1971. №72. С. 233-244.
2. ***Gleichgewicht B., Glazek K.*** Remarks of n-groups as abstract algebras // Collg Math. 1967. Vol. 17, №2. С. 691–693.
3. ***Русаков С.А.*** Алгебраические n-арные системы. Мн.: Навука і тэхніка, 1992. -245 с.
4. ***Гальмак А.М.*** Определения n-арной группы // Препринты Гомельского государственного университета. 1994. № 16. - 43 с.
5. ***Dudek W.A.*** Varieties of poliadic groups // Filomat. 1995. 9:3. С. 657–674.
6. ***Гальмак А.М.*** Конгруэнции полиадических групп. Мн.: Беларуская навука, 1999. - 182 с.
7. ***Биркгоф Г.*** Теория решёток. М.: Наука, 1984. - 564 с.
8. ***Hagemann J.*** On regular and weakly regular congruences // Preprint TH Darmstadt. 1973. №75.
9. ***Смирнов Д.М.*** Многообразия алгебр. Новосибирск: ВО «Наука», 1992. - 205 с.
10. ***Post E.L.*** Polyadic groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1940. Vol. 48, N2. P. 208-350.
11. ***Ольшанский А.Ю.*** Многообразия, в которых все конечные группы абелевы // Мат. сборник. 1985. Т. 126 (168):1. С. 59–82.

SUMMARY

In this paper the varieties of n-ary groups of the $\mathfrak{X}(n)$ form are defined and considered, where $\mathfrak{X}$ is variety of groups.

Поступила в редакцию 21.01.2000