УДК 512.542

О влиянии субмодулярных подгрупп на строение конечных групп

В.А. Васильев
Учреждение образования «Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины»

Подгруппа H конечной группы G называется субмодулярной в G, если H можно соединить с группой G цепью подгрупп, каждая из которых модулярна в следующей. Класс всех групп с субмодулярными силовскими подгруппами обозначается через smU, а его подкласс всех сверхразрешимых групп с субмодулярными силовскими подгруппами обозначается через sU. В статье решается задача нахождения в группе систем подгрупп, субмодулярность которых приводит к принадлежности группы классам smU и sU.

Цель – найти условия, при которых любая силовская подгруппа в группе является субмодулярной.

Материал и методы. *Материалом исследования послужили субмодулярные подгруппы конечных групп. В работе использовались методы теории конечных групп и теории формаций.*

Результаты и их обсуждение. *Доказано, что группа $G \in sU$ тогда и только тогда, когда G сверхразрешима и $\Phi(G/F(G)) = 1$. В теоремах 3.2 и 3.3 найдены условия, при которых группа принадлежит классам sU и smU.*

Заключение. *Найденные в теореме 3.2 условия, при которых группа сверхразрешима и любая силовская подгруппа в группе является субмодулярной, являются достаточными. Построен пример, показывающий, что в общем случае они не являются необходимыми, а также найден пример, где в теореме 3.3 группа $G \in smU$, но G не обязательно принадлежит sU. В качестве следствий из основных теорем получаются новые результаты.*

Ключевые слова: *конечная группа, модулярная подгруппа, субмодулярная подгруппа, сильно сверхразрешимая группа.*

On the Influence of Submodular Subgroups on the Structure of Finite Groups

V.A. Vasilyev
Educational Establishment «F. Scorina Gomel State University»

A subgroup H of a finite group G is said to be submodular in G, if H can be connected with G by a chain of subgroups each of which is submodular in the next one. The class of all groups with submodular Sylow subgroups is denoted by smU, and its subclass of all supersoluble groups with submodular Sylow subgroups is denoted by sU. In the article the problem of finding systems of subgroups the submodularity of which leads to the belongingness of a group to the classes of smU and sU is being solved.

The aim of the work is to find the conditions under which every Sylow subgroup of a group is submodular.

Material and methods. *Objects of the research are submodular subgroups of finite groups. Methods of the research are methods of the theory of groups and the theory of formations.*

Findings and their discussion. *It is proved that a group $G \in sU$ if and only if G is supersoluble and $\Phi(G/F(G)) = 1$. In Theorems 3.2 and 3.3 the conditions under which a group belongs to the classes of sU and smU are found.*

Conclusion. *The conditions found in Theorem 3.2 under which a group is supersoluble and every Sylow subgroup of a group is submodular are sufficient. An example showing that in the general case they are not necessary is constructed. Also an example showing that in Theorem 3.3 a group $G \in smU$ but G does not necessarily belongs to sU is found. As a consequence of the main theorems new results are obtained.*

Key words: *finite group, modular subgroup, submodular subgroup, strongly supersoluble group.*

1. Введение. В данной работе рассматриваются только конечные группы. Понятие модулярной подгруппы группы было введено Р. Шмидтом [1] как модулярного элемента в смысле Куроша в решетке всех подгрупп группы, т.е. *подгруппа M группы G называется модулярной в G, если выполняются следующие условия*: 1) $\langle X, M \cap Z\rangle = \langle X, M\rangle \cap Z$ *для всех* $X \le G$, $Z \le G$ *таких, что* $X \le Z$; 2) $\langle M, Y \cap Z\rangle = \langle M, Y\rangle \cap Z$ *для всех* $Y \le G$, $Z \le G$ *таких, что* $M \le Z$. Нормальные и квазинормальные (т.е. перестановочные с каждой подгруппой) подгруппы группы являются модулярными, обратное утверждение в общем случае неверно. Важность модулярных подгрупп продемонстрирована в [2, разд. 5.3] при теоретико-решеточных характеризациях многих классов групп.

Более широким понятием, чем модулярная подгруппа, является понятие субмодулярной подгруппы. Оно было введено И. Циммерман в [3] по аналогии с субнормальной подгруппой.

Определение [3]. *Подгруппа H группы G называется субмодулярной в G, если существует цепь подгрупп* $H = H_0 \le H_1 \le \cdots \le H_{s-1} \le H_s = G$ *такая, что* H_{i-1} *– модулярная подгруппа в* H_i *для*

$i = 1, \ldots , s$. Для краткости будем использовать обозначение $H\ sm\ G$.

В [3] получены основные свойства субмодулярных подгрупп и начато исследование групп с заданными субмодулярными подгруппами, в частности, с субмодулярными силовскими подгруппами.

В [4] был выделен класс всех групп с субмодулярными силовскими подгруппами (обозначается через $sm\mathfrak{U}$), а также его подкласс $s\mathfrak{U}$ сильно сверхразрешимых групп, т.е. всех сверхразрешимых групп с субмодулярными силовскими подгруппами. В [4] было доказано, что $sm\mathfrak{U}$ и $s\mathfrak{U}$ являются наследственными насыщенными формациями, и установлено их локальное задание. Получены необходимые и достаточные условия принадлежности группы классам $s\mathfrak{U}$ и $sm\mathfrak{U}$. Заметим, что $s\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{U}$ и $s\mathfrak{U} \neq \mathfrak{U}$, где $\mathfrak{U}$ – класс всех сверхразрешимых групп, $s\mathfrak{U} \subseteq sm\mathfrak{U}$ и $s\mathfrak{U} \neq sm\mathfrak{U}$.

Целью работы является нахождение в группе систем подгрупп, субмодулярность которых приводит к принадлежности группы классам $sm\mathfrak{U}$ ($s\mathfrak{U}$).

2. Предварительные результаты. Используются стандартные определения и обозначения, при необходимости см. [5–6]. Напомним некоторые из них.

Пусть G – группа. Через $|G|$ обозначается ее порядок; $\pi(G)$ – множество всех простых делителей $|G|$; M_G – ядро подгруппы M в G, т.е. пересечение всех подгрупп, сопряженных с M в G; p – некоторое простое число; $\Phi(G)$ – подгруппа Фраттини; $F(G)$ – подгруппа Фиттинга; $F_p(G)$ – p-нильпотентный радикал, т.е. произведение всех нормальных p-нильпотентных подгрупп группы G; $\mathrm{Syl}_p(G)$ – множество всех силовских p-подгрупп группы G; $\mathrm{Syl}(G)$ – множество всех силовских подгрупп из G; $\mathrm{Hall}(G)$ – множество всех холловых подгрупп из G.

Группа G называется *дисперсивной по Оре*, если $|G| = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_k^{n_k}$, $p_1 > p_2 > \ldots > p_k$ и G имеет нормальную подгруппу порядка $p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_i^{n_i}$ для любого $i = 1, 2, \ldots , k$.

Подгруппа H группы G называется *пронормальной* в G, если для любого $x \in G$ подгруппы H и H^x сопряжены между собой в $\langle H, H^x\rangle$.

Группа G *обладает свойством* D_π, где π – некоторое множество простых чисел, если выполняются следующие утверждения: 1) в G имеется холлова π-подгруппа; 2) любые две холловы π-подгруппы сопряжены в G; 3) любая π-подгруппа из G содержится в некоторой холловой π-подгруппе группы G. Разрешимая группа обладает свойством D_π для любого π.

Собственная подгруппа H группы G называется *максимальной модулярной* в G, если H модулярна в G и для любой модулярной в G подгруппы M из $H \leq M < G$ всегда следует $H = M$.

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется *формацией*, если выполняются следующие условия: 1) каждая фактор-группа любой группы из $\mathfrak{F}$ также принадлежит $\mathfrak{F}$; 2) из $A \trianglelefteq G$, $B \trianglelefteq G$, $G/A \in \mathfrak{F}$ и $G/B \in \mathfrak{F}$ всегда следует, что $G/A \cap B \in \mathfrak{F}$. Формация $\mathfrak{F}$ называется: 1) *наследственной*, если $\mathfrak{F}$ вместе с каждой группой содержит и все ее подгруппы; 2) *насыщенной*, если из $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ всегда следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация, тогда $G^{\mathfrak{F}}$ – $\mathfrak{F}$-корадикал группы G, т.е. наименьшая нормальная подгруппа группы G, для которой $G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$.

Используются следующие обозначения: $\mathfrak{S}$ – класс всех разрешимых групп; $\mathfrak{U}$ – класс всех сверхразрешимых групп; $\mathfrak{N}$ – класс всех нильпотентных групп; $\mathfrak{A}(p-1)$ – класс всех абелевых групп экспоненты, делящей $p-1$; $s\mathfrak{U}$ – класс всех сильно сверхразрешимых групп; $sm\mathfrak{U}$ – класс всех групп, в которых любая силовская подгруппа является субмодулярной; $\mathfrak{B}$ – класс всех абелевых групп экспоненты, свободной от квадратов простых чисел.

Теорема 2.1 [6, гл. А, теорема 6.4 (a)]. *Пусть G – группа и p – простое число. Если $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ и N нормальна в G, то $P \cap N \in \mathrm{Syl}_p(N)$, $PN/N \cap N \in \mathrm{Syl}_p(G/N)$ и $N_{G/N}(PN/N) = N_G(P)N/N$.*

Теорема 2.2 [7, теорема 1.4]. *Пусть H/K – p-главный фактор группы G. Тогда и только тогда $|H/K| = p$, когда $\mathrm{Aut}_G(H/K)$ абелева группа экспоненты, делящей $p-1$.*

Лемма 2.3 [5, лемма 3.9 (1)]. *Если H/K – главный фактор группы G и $p \in \pi(H/K)$, то $G/C_G(H/K)$ не содержит неединичных нормальных p-подгрупп, причем $F_p(G) \leq C_G(H/K)$.*

Лемма 2.4 [3, лемма 1]. *Пусть G – группа и $T \leq G$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *если $T\ sm\ G$ и U – подгруппа из G, то $U \cap T\ sm\ U$;*

(2) *если $T\ sm\ G$, N нормальна в G и $N \leq T$, то $T/N\ sm\ G/N$;*

(3) *если $T/N\ sm\ G/N$, то $T\ sm\ G$;*

(4) *если $T\ sm\ G$, то $T^x\ sm\ G$ для любого $x \in G$;*

(5) *если $T_1\ sm\ G$ и $T_2\ sm\ G$, то $T_1 \cap T_2\ sm\ G$;*

(6) *если $T\ sm\ G$, то $TN\ sm\ G$ для любой нормальной в G подгруппы N.*

Лемма 2.5 [1, лемма 1]. *Подгруппа M группы G является максимальной модулярной подгруппой в G тогда и только тогда, когда либо M – максимальная нормальная подгруппа в G, либо G/M_G неабелева порядка pq, где p и q – простые числа.*

Предложение 2.6 [3, предложение 7]. *Пусть* *группа* $G = \langle U, T\rangle$, *где* U *– разрешимая подгруппа,* T *– разрешимая субмодулярная подгруппа в* G. *Тогда* G *разрешима.*

Теорема 2.7 [4, теорема А]. *Класс* $s\mathrm{U}$ *всех сильно сверхразрешимых групп является наследственной насыщенной формацией и имеет локальный экран* f *такой, что* $f(p) = \mathrm{A}(p\text{-}1) \cap \mathrm{B}$ *для любого простого числа* p.

Теорема 2.8 [4, теорема С]. *Класс* $sm\mathrm{U}$ *всех групп с субмодулярными силовскими подгруппами является наследственной насыщенной формацией и имеет локальный экран* f *такой, что* $f(p) = (G \in \mathrm{S} \mid \mathrm{Syl}(G) \subseteq \mathrm{A}(p\text{-}1) \cap \mathrm{B})$ *для любого простого числа* p.

Предложение 2.9 [3, предложение 9]. *Если* $G \in sm\mathrm{U}$, *то* G *дисперсивна по Оре.*

Лемма 2.10 [5, лемма 4.5]. *Пусть* f *– локальный экран формации* F. *Группа* G *тогда и только тогда принадлежит* F, *когда* $G/F_p(G) \in f(p)$ *для любого* $p \in \pi(G)$.

Лемма 2.11 [6, гл. А, лемма 14.1 (а)]. *Пусть* U *– субнормальная подгруппа группы* G. *Тогда:*

(a) *если* $T \leq G$, *то* $U \cap T$ *– субнормальная в* U *подгруппа;*

(b) *если* $N \trianglelefteq G$, *то* UN/N *– субнормальная в* G/N *подгруппа.*

Теорема 2.12 [6, гл. А, теорема 8.8 (а)]. *Если* G *– группа, то* $F(G) = \langle S \mid S$ *– субнормальная подгруппа группы* G и S *нильпотентна*$\rangle$, *в частности,* $F(G)$ *– наибольшая нормальная нильпотентная подгруппа в* G.

Нам потребуются некоторые свойства подгруппы Фраттини из [6, гл. А, теорема 9.2].

Теорема 2.13. *Пусть* G *– группа. Тогда:*

(1) *если* $N \trianglelefteq G$, $U \leq G$ *и* $N \leq \Phi(U)$, *то* $N \leq \Phi(G)$;

(2) *если* $N \trianglelefteq G$, *то* $\Phi(N) \leq \Phi(G)$ *и* $\Phi(G)N/N \leq \Phi(G/N)$. *Если* $N \leq \Phi(G)$, *то* $\Phi(G/N) = \Phi(G)/N$.

Теорема 2.14 [6, гл. А, теорема 9.6 (с), (d)]. *Пусть* G *–* p*-группа. Тогда:*

(1) *если* $U \leq G$, *то* $\Phi(U) \leq \Phi(G)$;

(2) *если* $N \trianglelefteq G$, *то* $\Phi(G/N) = \Phi(G)N/N$.

Лемма 2.15 [6, гл. А, лемма 9.4]. *Пусть* $G_1,\dots,G_r$ *– группы. Тогда* $\Phi(G_1 \times\cdots\times G_r) = \Phi(G_1)\times\cdots\times\Phi(G_r)$.

3. Основные результаты.

Предложение 3.1. *Пусть* G *– группа. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *если* $P \in \mathrm{Syl}(G)$ *и* P *sm* G, *то* $\Phi(P)$ *– субнормальная подгруппа в* G *и* $\Phi(PF(G)/F(G)) = 1$;

(2) *если* $G \in sm\mathrm{U}$, то $\Phi(S/F(G)) = 1$ *для любой* $S/F(G) \in \mathrm{Syl}(G)$;

(3) *группа* $G \in s\mathrm{U}$ *тогда и только тогда, когда* $G \in \mathrm{U}$ *и* $\Phi(G/F(G)) = 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. (1). Докажем индукцией по $|G|$, что $\Phi(P)$ – субнормальная подгруппа в G для любой $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Для $P = G$ это утверждение выполняется. Пусть $P \neq G$. Тогда P содержится в некоторой максимальной модулярной подгруппе M из G. По индукции $\Phi(P)$ – субнормальная подгруппа в M. Ввиду леммы 2.5 можно считать, что G/M_G – неабелева подгруппа порядка rq (r и q – простые числа). Если $P \leq M_G$, то по лемме 2.11 (а) $\Phi(P) = \Phi(P) \cap M_G$ субнормальна в M_G и $\Phi(P)$ субнормальна в G. Пусть P не содержится в M_G. Тогда $PM_G/M_G \in \mathrm{Syl}_p(G/M_G)$ и $r = p \neq q$. Из того, что $|P/P \cap M_G| = |PM_G/M_G| = p$, следует, что $P \cap M_G$ – максимальная подгруппа в P. Поэтому $\Phi(P)\leq P \cap M_G$. Итак, доказано, что $\Phi(P)$ – субнормальная подгруппа в G.

Докажем, что $\Phi(PF(G)/F(G)) = 1$ для любой $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Если $P \trianglelefteq G$, то $P \leq F(G)$ и это утверждение выполняется. Пусть P не является нормальной подгруппой в G. По доказанному выше и теореме 2.12 $\Phi(P) \leq F(G)$. Тогда из $P \cap F(G)/\Phi(P) \trianglelefteq P/\Phi(P)$ и $\Phi(P/\Phi(P)) = 1$ по (2) теоремы 2.14 имеем, что $\Phi(P/\Phi(P)/P \cap F(G)/\Phi(P)) = 1$. Ввиду изоморфизма $PF(G)/F(G) \simeq P/\Phi(P)/(P \cap F(G)/\Phi(P))$ получаем, что $\Phi(PF(G)/F(G)) = 1$. Утверждение (1) доказано.

(2). Пусть $G \in sm\mathrm{U}$ и $S/F(G) \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Тогда в G найдется силовская p-подгруппа P такая, что $S/F(G) = PF(G)/F(G)$. По утверждению (1) $\Phi(S/F(G)) = 1$.

(3). Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть $G \in s\mathrm{U}$. Так как G сверхразрешима, коммутант G' нильпотентен. Тогда $G' \leq F(G)$ и $G/F(G)$ абелева. Поэтому $G/F(G) = P_1/F(G) \times\cdots\times P_n/F(G)$, где $P_i \in \mathrm{Syl}_{p_i}(G)$,
$i = 1, \dots, n$. Из $s\mathrm{U} \subseteq sm\mathrm{U}$, утверждения (2) и леммы 2.15 получаем, что $\Phi(G/F(G)) = 1$.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть теперь $G \in \mathrm{U}$ и $\Phi(G/F(G))=1$. Проведем доказательство индукцией по $|G|$. Пусть $Q\in \mathrm{Syl}_q(G)$. Если $\Phi(G) \neq 1$, то $F(G/\Phi(G)) = F(G)/\Phi(G)$. Тогда $\Phi(G/\Phi(G)/F(G/\Phi(G))) = 1$ и по индукции $G/\Phi(G) \in s\mathrm{U}$. Из теоремы 2.7 следует, что $G \in s\mathrm{U}$ и Q *sm* G. Допустим, что $\Phi(G) = 1$. Так как $G' \leq F(G)$, подгруппа $QF(G)/F(G)$ нормальна в $G/F(G)$. Поэтому $QF(G)$ нормальна в G. Если $QF(G) \neq G$, то $F(QF(G)) = F(G)$ и по (2) теоремы 2.13 $\Phi(QF(G)/F(G)) \leq \Phi(G/F(G)) = 1$. По индукции Q *sm* $QF(G)$, а значит, Q *sm* G. Предположим, что $QF(G) = G$. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа G. Тогда $N \leq F(G)$. Ввиду $F(G)/N \leq F(G/N)$ и $\Phi(G/F(G)) = 1$ легко проверить, что $\Phi(G/N/F(G/N)) = 1$. По индукции $G/N \in s\mathfrak{U}$. Поэтому QN/N sm G/N. По лемме 2.4 QN sm G. Из сверхразрешимости G следует, что $|N| = p$ – некоторое простое число. Если $p = q$, то Q sm G. Допустим, что $p \neq q$. Заметим, что $F(G) \leq C_G(N)$. Если $C_G(N) = G$, подгруппа Q нормальна в QN, поэтому субмодулярна в G. Рассмотрим случай $C_G(N) \neq G$. Ввиду теоремы 2.2 $G/C_G(N)$ изоморфна неединичной подгруппе циклической группы порядка p-1. Так как $C_G(N)/F(G) \trianglelefteq G/F(G)$, из (2) леммы 2.14 заключаем, что $\Phi(G/C_G(N)) = 1$. Тогда $q = |G/C_G(N)| = |Q/Q \cap C_G(N)|$. Подгруппа $Q \cap C_G(N)$ является ядром подгруппы Q в QN. По лемме 2.5 Q sm QN. Поэтому Q sm G. Утверждение (3) доказано. Предложение доказано полностью.

В [3] рассматривались группы, у которых все подгруппы модулярны (так называемые M-группы), а также группы, у которых все подгруппы субмодулярны в группе. Ясно, что они принадлежат классу $sm\mathfrak{U}$. Заметим, если нормализатор любой силовской подгруппы группы G является субмодулярной подгруппой в G или любая холлова подгруппа группы G субмодулярна в G, то $G \in sm\mathfrak{U}$. Следующая теорема уточняет строение такой группы.

Теорема 3.2. *Пусть в группе G выполняется одно из следующих условий:*

(1) $N_G(P)$ *sm* G *для любой* $P \in \mathrm{Syl}(G)$;

(2) $N_G(S)$ *sm* G *для любой* $S \in \mathrm{Hall}(G)$;

(3) S *sm* G *для любой* $S \in \mathrm{Hall}(G)$;

(4) H *sm* G *для любой пронормальной в* G *подгруппы* H.

Тогда $G \in s\mathfrak{U}$.

Доказательство. Пусть выполняется условие (1). Проведем доказательство индукцией по $|G|$. Из $G \in sm\mathfrak{U}$ и предложения 2.9 следует, что G дисперсивна по Оре, а значит, разрешима. Для любой минимальной нормальной подгруппы N из G ввиду $|G/N| < |G|$, теоремы 2.1 и леммы 2.4 фактор-группа $G/N \in s\mathfrak{U}$. По теореме 2.7 $s\mathfrak{U}$ – наследственная насыщенная формация. Поэтому нужно рассмотреть только случай, когда N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G и $\Phi(G) = 1$. Тогда в G найдется максимальная подгруппа M такая, что $G = NM$, $N \cap M = 1$. Заметим, что $N = C_G(N)$, $N \leq P \in \mathrm{Syl}_p(G)$, p – наибольшее простое число из $\pi(G)$. Ввиду леммы 2.3 $N = P$. Так как $M_G = 1$ и $M \leq N_G(Q)$, где $Q \in \mathrm{Syl}_q(M)$ (q – наибольшее простое число из $\pi(M)$), имеем $M = N_G(Q)$ – максимальная модулярная подгруппа в G. По лемме 2.5 G – неабелева группа порядка pq. Поэтому $G \in s\mathfrak{U}$.

Пусть выполняется условие (2). Тогда выполняется условие (1) и $G \in s\mathfrak{U}$.

Пусть выполняется условие (3). Проведем доказательство индукцией по $|G|$. Так как множество $\mathrm{Syl}(G) \subseteq \mathrm{Hall}(G)$, группа $G \in sm\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{S}$. Тогда G обладает свойством D_π. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа G. Для G/N выполняется условие (3). По индукции $G/N \in s\mathfrak{U}$. Можно считать, что N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, $\Phi(G) = 1$. Тогда $G = NM$ для некоторой максимальной подгруппы M из G. При этом $N \cap M = 1$ и $N = C_G(N)$. Легко заметить, что N – силовская p-подгруппа группы G, p – наибольший простой делитель $|G|$. Тогда $M \in \mathrm{Hall}(G)$. Так как M – максимальная подгруппа и M sm G, заключаем, что M – максимальная модулярная подгруппа в G. Из леммы 2.5 следует, что $G \in s\mathfrak{U}$.

Пусть выполняется условие (4). Так как для любой $P \in \mathrm{Syl}(G)$ и любого $x \in G$ подгруппы P и P^x сопряжены между собой в $\langle P, P^x \rangle$, подгруппа P является пронормальной в G. Поэтому P sm G и группа $G \in sm\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{S}$. Тогда G обладает свойством D_π. Поэтому любая холлова подгруппа из G является пронормальной в G и выполняется условие (3). Тогда $G \in s\mathfrak{U}$. Теорема доказана.

Теорема 3.3. *Пусть группа $G = AB$ – произведение субмодулярных подгрупп A и B и выполняется одно из следующих условий:*

(1) $A \in sm\mathfrak{U}$, $B \in sm\mathfrak{U}$ *и* $(|G{:}A|, |G{:}B|) = 1$;

(2) $A \in s\mathfrak{U}$, $B \in s\mathfrak{U}$ *и* $(|G{:}A|, |G{:}B|) = 1$;

(3) $A \in sm\mathfrak{U}$, $B \in sm\mathfrak{U}$ *и G имеет нильпотентную подгруппу K такую, что K – наименьшая нормальная подгруппа из G, для которой G/K – группа с элементарными абелевыми силовскими подгруппами.*

Тогда $G \in sm\mathfrak{U}$.

Доказательство. Пусть выполняется условие (1). Рассмотрим любую $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Так как $|G{:}A|, |G{:}B|) = 1$, найдется элемент $x \in G$ такой, что либо $P^x = S \in \mathrm{Syl}_p(A)$, либо $P^x = R \in \mathrm{Syl}_p(B)$. Тогда P^x sm G. Ввиду леммы 2.4 $G \in sm\mathfrak{U}$.

Пусть выполняется условие (2). Тогда из $s\mathfrak{U} \subseteq sm\mathfrak{U}$ и (1) теоремы 3.3 получаем, что $G \in sm\mathfrak{U}$.

Пусть справедливо условие (3). Проведем доказательство индукцией по $|G|$. По предложениям 2.9 и 2.6 G разрешима. Для любой минимальной нормальной подгруппы N группы G условие (3) выполняется для G/N. По индукции $G/N \in sm\mathfrak{U}$. По теореме 2.8 N является единственной минимальной нормальной подгруппой группы G и $\Phi(G) = 1$. Тогда $G = NM$ для некоторой максимальной подгруппы M из G, $N \cap M = 1$ и $N = C_G(N) = F(G) = F_p(G)$ – p-группа для некоторого простого p. Ввиду индукции можно считать, что A и B – максимальные модулярные подгруппы группы G. Тогда $|G:A|$ и $|G:B|$ являются простыми числами. Если $G = NA$ или $G = NB$, то ввиду леммы 2.5 $G \in sm\mathfrak{U}$. Пусть $NA \neq G \neq NB$. Так как $N \leq A \cap B$, имеем $A = N(A \cap M)$ и $B = N(B \cap M)$. Легко проверяется, что p – наибольший простой делитель $|G|$ и $N \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Из $G = AB = NM$ получаем, что $M = (A \cap M)(B \cap M)$. Из $N = C_G(N)$ следует, что $O_{p'}(A) = O_{p'}(B) = 1$. Поэтому $F_p(A) = F_p(B) = N$. По лемме 2.10 и теореме 2.8 $A/F_p(A) \simeq A \cap M \in f(p) = (G \in \mathfrak{S} \mid \mathrm{Syl}(G) \subseteq$

$\subseteq \mathfrak{A}(p\text{-}1) \cap \mathfrak{B})$ и $B/F_p(B) \simeq B \cap M \in f(p)$. Ясно, что $K = G^{\mathfrak{H}}$ для класса $\mathfrak{H}$ всех разрешимых групп с элементарными абелевыми силовскими подгруппами. Из $G^{\mathfrak{H}} \leq N$ следует, что $M \in \mathfrak{H}$. Тогда из $\mathrm{Syl}(A \cap \cap M) \subseteq \mathfrak{A}(p\text{-}1) \cap \mathfrak{B})$ и $\mathrm{Syl}(B \cap M) \subseteq \mathfrak{A}(p\text{-}1) \cap \mathfrak{B})$ заключаем, что $M \in f(p)$. Из леммы 2.10 следует, что $G \in sm\mathfrak{U}$. Теорема доказана полностью.

Заключение. В теореме 3.2 получены достаточные условия принадлежности группы классу $s\mathfrak{U}$. В общем случае они не являются необходимыми. Примером служит сильно сверхразрешимая группа $G = G_1G_2$, где G_1 – циклическая группа порядка 7, G_2 изоморфна группе автоморфизмов циклической группы порядка 7. Подгруппа G_2 циклическая, $|G_2| = 6$ и G_2 является в G нормализатором силовской p-подгруппы, $p \in \pi = \{2, 3\}$. Также G_2 – холлова π-подгруппа в G и $N_G(G_2) = G_2$. Подгруппа G_2 максимальна в G, но не субмодулярна в G.

Покажем, что в теореме 3.3 группа $G \in sm\mathfrak{U}$, но G не обязательно принадлежит $s\mathfrak{U}$. Используем пример 1 из [8], где установлено, что для симметрической группы S степени 3 и точного неприводимого S-модуля U над полем F_7 из 7 элементов полупрямое произведение $G = [U]S$ является несверхразрешимой группой и имеет сверхразрешимые подгруппы $A = UP$ и $B = UQ$, где $P \in \mathrm{Syl}_2(G)$ и $Q \in \mathrm{Syl}_3(G)$. Ясно, что $G = AB$ и $(|G:A|, |G:B|) = 1$. Покажем, что $A \in sm\mathfrak{U}$ и $B \in sm\mathfrak{U}$. Подгруппа U нормальна в A и B, $U \in \mathrm{Syl}_7(A)$ и $U \in \mathrm{Syl}_7(B)$. Поэтому $U\ sm\ A$ и $U\ sm\ B$. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа из A, содержащаяся в U. Тогда $|N| = 7$ и $P\ sm\ NP$. Если NP нормальна в A, то $P\ sm\ A$. Если NP не является нормальной подгруппой в A, то N есть ядро подгруппы NP в A. Тогда A/N – неабелева группа порядка 14. Из леммы 2.5 следует, что NP – максимальная модулярная подгруппа в A. Отсюда получаем, что $P\ sm\ A$. Пусть теперь N – минимальная нормальная подгруппа из B, содержащаяся в U. Подгруппа $Q\ sm\ NQ$. В случае $NQ \trianglelefteq B$ заключаем, что $Q\ sm\ B$. Если NQ не является нормальной подгруппой в A, то B/N неабелева, $|B/N| = 21$ и N есть ядро подгруппы NQ в B. Ввиду леммы 2.5 $NQ\ sm\ B$. Значит, $Q\ sm\ B$. Итак, $A \in sm\mathfrak{U}$ и $B \in sm\mathfrak{U}$. Ясно, что $A\ sm\ G$ и $B\ sm\ G$. Из условия (2) теоремы 3.3 следует, что $G \in sm\mathfrak{U}$.

Теорема 3.3 позволяет получить в качестве следствий новые результаты.

Следствие. *Пусть группа $G = AB$ – произведение $s\mathfrak{U}$-подгрупп A и B и выполняется одно из следующих условий:*

(1) *A и B – нормальные подгруппы из G и* $(|G:A|, |G:B|) = 1$;

(2) *A и B – субмодулярные подгруппы из G и коммутант группы $G' \in \mathfrak{N}$;*

(3) *A и B – нормальные подгруппы из G и коммутант группы $G' \in \mathfrak{N}$.*

Тогда $G \in s\mathfrak{U}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Schmidt, R. Modulare Untergruppen endlicher Gruppen / R. Schmidt // Illinois J. Math. – 1969. – Vol. 13, № 2. – P. 358–377.
2. Schmidt, R. Subgroup Lattices of Groups / R. Schmidt. – Berlin–New York: Walter de Gruyter, 1994. – 572 p.
3. Zimmermann, I. Submodular Subgroups in Finite Groups / I. Zimmermann // Math. Z. – 1989. – Vol. 202. – P. 545–557.
4. Васильев, В.А. Конечные группы с субмодулярными силовскими подгруппами / В.А. Васильев // Сиб. матем. журн. – 2015. – Vol. 56, № 6. – P. 1277–1288.
5. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.
6. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–New York: Walter de Gruyter, 1992. – 892 p.
7. Between Nilpotent and Solvable / H.G. Bray [and others]; edited by M. Weinstein. – Passaic: Polugonal Publishing House, 1982. – 240 p.
8. Васильев, А.Ф. О конечных группах сверхразрешимого типа / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Сиб. мат. журн. – 2010. – Т. 51, № 6. – С. 1270–1281.

REFERENCES

1. Schmidt, R. Modulare Untergruppen endlicher Gruppen / R. Schmidt // Illinois J. Math. – 1969. – Vol. 13, № 2. – P. 358–377.
2. Schmidt, R. Subgroup Lattices of Groups / R. Schmidt. – Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1994. – 572 p.
3. Zimmermann, I. Submodular Subgroups in Finite Groups / I. Zimmermann // Math. Z. – 1989. – Vol. 202. – P. 545–557.
4. Vasilyev V.A. *Sib. matem. zhurn.* [Siberian Math. J.], 2015, 56(6), pp. 1277–1288.
5. Shemetkov L.A. *Formatsii konechnikh grupp* [Formations of Finite Groups], Moscow, Nauka, 1978, 272 p.
6. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1992. – 892 p.
7. Between Nilpotent and Solvable / H.G. Bray [and others]; edited by M. Weinstein. – Passaic: Polugonal Publishing House, 1982. – 240 p.
8. Vasilyev A.F., Vasilyeva T.I., Tyutyanov V.N. *Sib. matem. zhurn.* [Siberian Math. J.], 2010, 51(6), pp. 1270–1281.

Поступила в редакцию 11.03.2016 ***Адрес для корреспонденции:*** e-mail: VovichX@mail.ru – Васильев В.А.