УДК 517.538.52+517.538.53

Об асимптотике поведения аппроксимаций Эрмита–Паде системы экспонент

А.В. Герман
Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины»

Проблема исследования аппроксимаций Эрмита–Паде системы экспонент связана с трудоемким процессом и отсутствием единых методов нахождения асимптотики для различных систем экспонент.

Цель работ – изучить асимптотику диагональных аппроксимаций Эрмита–Паде $\left\{\pi^{j}_{kn,kn}\left(z; e^{\lambda_j\xi}\right)\right\}_{j=1}^{k}$.

Материал и методы. *Объекты исследования – аппроксимации Эрмита–Паде, а предмет – асимптотика диагональных аппроксимаций Эрмита–Паде системы экспонент. Использован метод Лапласа.*

Результаты и их обсуждение. *Для аппроксимаций Эрмита–Паде системы функций* $\left\{e^{\lambda_j z}\right\}_{j=1}^{k}$, *где* $\lambda_j = (\alpha + i\beta)\, b_j$ *– различные комплексные числа, лежащие на одной прямой, проходящей через начало координат, сформулирована теорема о поведении асимптотики разности* $e^{\lambda_j z} - \pi^{j}_{kn,kn}(z, e^{\lambda_j \xi})$. *Для доказательства данной теоремы применяется метод Лапласа к интегральному представлению остаточного члена аппроксимаций Эрмита–Паде.*

Заключение. *В статье для любого комплексного числа* z *найдена асимптотика поведения разностей* $e^{\lambda_j z} - \pi^{j}_{kn,kn}(z, e^{\lambda_j \xi})$ *при* $j = 1, 2, ..., k$. *Полученные результаты дополняют исследования Эрмита, Паде, А.И. Аптекарева, А.П. Старовойтова, относящиеся к изучению сходимости аппроксимаций Эрмита–Паде для системы экспонент.*

Ключевые слова: *аппроксимации Эрмита–Паде, диагональные аппроксимации Эрмита–Паде, асимптотические равенства, интегралы Эрмита, метод Лапласа.*

About the Asymptotic Behavior of Hermite–Pade System of Exponentials

A.V. Herman
Educational Establishment «Gomel State F. Scorina University»

The issue of asymptotic study of Hermite–Pade approximants of the exponent system is connected with the work consuming process and the lack of unified research methods for different exponent systems.

The purpose of the work is to study asymptotics of Hermit-Pade diagonal approximants $\left\{\pi^{j}_{kn,kn}\left(z; e^{\lambda_j\xi}\right)\right\}_{j=1}^{k}$.

Material and methods. *The subjects of the research are Hermite–Pade approximants. The object of the research is asymptotics of Hermite–Pade diagonal approximants of the system of exponents. Laplas method is used.*

Findings and their discussion. *For Hermite-Pade approximants of the system of functions* $\left\{e^{\lambda_j z}\right\}_{j=1}^{k}$, *where* $\lambda_j = (\alpha + i\beta)\, b_j$ *are different complex numbers, which are located on one straight, that goes through the beginning of coordinates, the theorem on asymptotic behavior of the difference* $e^{\lambda_j z} - \pi^{j}_{kn,kn}(z, e^{\lambda_j \xi})$ *is formulated. To prove the theorem Laplas method to integral picture of the remaining member of Hermite-Pade approximants is used.*

Conclusion. *In the article for any complex number z asymptotics of difference behavior* $e^{\lambda_j z} - \pi^{j}_{kn,kn}(z, e^{\lambda_j \xi})$ *is found with* $j = 1, 2, ..., k$. *The findings contribute Hermite's, Pade's, A.I. Aptekarev's, A.P. Starovoitov's researches which refer to the study of convergence of Hermite–Pade approximants for the exponent system.*

Key words: *Hermite–Pade approximants, diagonal Hermite–Pade approximants, asymptotic equations, Hermite integrals, Laplas method.*

Рассмотрим набор голоморфных в нуле функций

$$f_j(z)=\sum_{i=0}^{\infty} f_i^j z^i, \qquad j=1,2,..., k. \qquad (1)$$

Зафиксируем произвольные целые неотрицательные числа n, $m_1, m_2, ..., m_k$. По определению полагаем $m=\sum_{i=1}^{k} m_i$, $n_j=n+m-m_j$, $j=1, 2, ..., k$. Известно [1], что при $j=1, 2, ..., k$ существуют многочлены $Q_m(z)$, $P_{n_j}^j(z)$, $\deg Q_m(z)\le m$, $\deg P_{n_j}^j(z)\le n_j$, для которых

$$R_{n,m}^j(z)=Q_m(z)\, f_j(z)-P_{n_j}^j(z)=O(z^{n+m+1}). \quad (2)$$

При $k\ge 2$ дроби $\pi_{n,m}^j(z)=\pi_{n,m}^j(z;\ f_j)=P_{n_j}^j(z)/Q_m(z)$, $j=1, 2, ..., k$, определенные условиями (2), находятся, вообще говоря, неоднозначно. В случае единственности множества $\{\pi_{n,m}^j(z)\}_{j=1}^k$ его элементы называют аппроксимациями Эрмита–Паде II типа для системы функций (1). Единственность имеет место для системы экспонент $f_j(z)=e^{\lambda_j z}$, $j=1, 2, ..., k$, где $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ – различные комплексные числа [1]. Без формального определения этот факт установлен Ш. Эрмитом [2]. При $m_1=m_2=...=m_k=n$ аппроксимации Эрмита–Паде $\pi_{kn,kn}^j(z; f_j)$ называют диагональными.

Впервые такие конструкции рациональных дробей для системы $\{1, e^z, ..., e^{kz}\}$ рассмотрел Ш. Эрмит [2] при доказательстве трансцендентности числа e. Усложнив рассуждения Эрмита, Ф. Линдеман [3] доказал трансцендентность числа π, решив, тем самым, задачу о квадратуре круга. В своих рассуждениях Ф. Линдеман рассматривал аналог дробей Эрмита для системы экспонент $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$, где λ_j – различные алгебраические числа. К. Малер [4] использовал аппроксимации Эрмита–Паде для получения количественной оценки меры трансцендентности некоторых чисел. В последнее время интерес к аппроксимациям Эрмита–Паде возрос [5–6]. Они активно применяются в теории приближения аналитических функций [7], теории диофантовых приближений, в частности, при исследовании алгебраической природы математических констант [8], а также при описании спекторов некоторых классов операторов [5].

Важную роль в теории аппроксимаций Эрмита–Паде сыграла задача Е.М. Никишина, относящаяся к исследованию сходимости аппроксимаций Эрмита–Паде для произвольной системы экспонент. Ее решение было получено А.И. Аптекаревым [9], который доказал, что при различных комплексных числах λ_j, $j=1, 2, ..., k$, и $n+m\to+\infty$ $\pi_{n,m}^j(z; e^{\lambda_j\xi})$ сходятся равномерно на компактах в Χ к $e^{\lambda_j z}$. В [9] установлено, что

$$Q_m(z)=\exp\left\{-\frac{\sum_{j=1}^k \lambda_j m_j}{n+m} z\right\}, \qquad (3)$$

и приводятся явные формулы

$$Q_m(z)=\frac{z^{n+m+1}}{(n+m)!}\int_0^{\infty}\left[x^n\prod_{i=1}^k (x-\lambda_i)^{m_i}\right]e^{-zx}dx,$$

$$P_{n_j}^j(z)=\frac{e^{\lambda_j z}z^{n+m+1}}{(n+m)!}\int_{\lambda_j}^{\infty}\left[x^n\prod_{i=1}^k (x-\lambda_i)^{m_i}\right]e^{-zx}dx, \qquad (4)$$

$$R_{n,m}^j(z)=\frac{e^{\lambda_j z}z^{n+m+1}}{(n+m)!}\int_0^{\lambda_j}\left[x^n\prod_{i=1}^k (x-\lambda_i)^{m_i}\right]e^{-zx}dx,$$

где $Q_m(z)$, $P_{n_j}^j(z)$ – соответственно знаменатель и числитель $\pi_{n,m}^j(z; e^{\lambda_j\xi})$. Интегралы (4) принято называть интегралами Эрмита.

В данной статье рассматривается система экспонент $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$, λ_j – различные комплексные числа, лежащие на произвольной фиксированной прямой, проходящей через начало координат. Для такой системы экспонент исследуется асимптотика поведения соответствующих диагональных аппроксимаций Эрмита–Паде. При различных действительных $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ аналогичная задача решена в [10]. Случай, когда $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ лежат на мнимой оси, рассматривался в [11].

Основные результаты. Рассмотрим комплексные числа $\lambda_j=(\alpha+i\beta)b_j$, где α, β, $\{b_j\}_{j=1}^k$ – действительные числа. Ясно, что все они лежат на прямой, проходящей через начало координат, угловой коэффициент которой зависит от выбора чисел α и β. Обозначим через $\{b_j^*\}_{j=1}^k$ множество точек $\{b_j\}_{j=1}^k\cup\{0\}$, занумерованных в порядке возрастания, т.е. $b_0^*<b_1^*<...<b_k^*$. Определим следующие функции $\varphi(x)=(x-b_0^*)(x-b_1^*)\ ...\ (x-b_k^*)=x(x-b_1)...(x-b_k)$,

$$S(x) = \ln((-1)^{k+p+1}\varphi(x)), \quad x \in (b^*_{p-1}; b^*_p),$$
$$S(b^*_p) = -\infty, \quad p = 0, 1, ..., k.$$

Функция $\varphi(x)$ имеет нули в точках $b^*_0, b^*_1, ..., b^*_k$. Тогда на каждом из интервалов $(b^*_0; b^*_1)$, $(b^*_1; b^*_2)$, ..., $(b^*_{k-1}; b^*_k)$ производная $\varphi'(x)$ обращается в нуль. Обозначим через $\{x_1, x_2, ..., x_k\}$ нули функции $\varphi'(x)$, занумерованные в порядке возрастания, т.е. $x_p \in (b^*_{p-1}; b^*_p)$. Наибольшее значение на интервале $(b^*_{p-1}; b^*_p)$ функция $S(x)$ принимает в точках x_p, т.е. $S(x) < S(x_p)$ при $x \in (b^*_{p-1}; b^*_p) / \{x_p\}$. И при этом на каждом из интервалов $(b^*_{p-1}; b^*_p)$ имеем

$$S'(x) = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}, \quad S''(x) = \frac{\varphi''(x)\varphi(x) - [\varphi'(x)]^2}{\varphi^2(x)} =$$
$$= -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x-b_1)^2} - ... - \frac{1}{(x-b_k)^2}.$$

Откуда получим, что $S''(x_p) < 0$.

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 1. *Пусть* $n = m_1 = ... = m_k$ *и* $\pi^j_{kn,kn}(z; e^{\lambda_j \xi})$ *– аппроксимации Эрмита–Паде для системы экспонент* $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$, *где* $\lambda_j = (\alpha + i\beta)b_j$ *– различные и отличные от нуля комплексные числа. Тогда для любого комплексного* z, $|z| \le L$, *и* $j \in \{1, 2, ..., k\}$ *при* $n \to \infty$ *имеем*

$$e^{\lambda_j z} - \pi^j_{kn,kn}(z; e^{\lambda_j \xi}) =$$
$$= (-1)^{(k+1)n}(\alpha + i\beta)^{n(k+1)+1} \frac{z^{kn+n+1}}{(kn+n)!} e^{\lambda_j z} e^{\frac{\sum_{p=0}^k \lambda_p}{k+1}} \times$$
$$\times sign(b_j) \sum_p{}^* (-1)^{np} \sqrt{\frac{-2\pi}{nS''(x_p)}}\, e^{nS(x_p)} e^{-z(\alpha+i\beta)x_p}(1 + O_p(1/n)),$$

где в $\sum_p^*$ *суммирование распространяется только на те значения* p *из* $\{1, 2, ..., k\}$, *для которых* x_p *лежат в интервале с концами в точках* 0 *и* b_j.

Остановимся подробнее на следствиях теоремы 1. В случае, когда $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ лежат на действительной или мнимой оси, получим следствия 1 и 2, совпадающие с теоремами из работ [10–11].

Следствие 1. *Пусть* $n = m_1 = ... = m_k$ *и* $\pi^j_{kn,kn}(z; e^{\lambda_j \xi})$ *– аппроксимации Эрмита–Паде для системы экспонент* $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$, *где* $\lambda_j = ib_j$ *– различные и отличные от нуля комплексные числа. Тогда для любого комплексного* z, $|z| \le L$, *и* $j \in \{1, 2, ..., k\}$ *при* $n \to \infty$ *имеем*

$$e^{\lambda_j z} - \pi^j_{kn,kn}(z; e^{\lambda_j \xi}) =$$
$$= (-i)^{n(k+1)+3} sign(b_j) \frac{z^{kn+n+1}}{(kn+n)!} e^{\lambda_j z} e^{\frac{\sum_{p=0}^k \lambda_p}{k+1}} \times$$
$$\times \sum_p{}^* (-1)^{np} \sqrt{\frac{-2\pi}{nS''(x_p)}}\, e^{nS(x_p)} e^{-izx_p}(1 + O_p(1/n)),$$

где в $\sum_p^*$ *суммирование распространяется только на те значения* p *из* $\{1, 2, ..., k\}$, *для которых* x_p *лежат в интервале с концами в точках* 0 *и* b_j.

Для доказательства следствия 1 необходимо в теореме 1 положить $\alpha = 0$, а $\beta = 1$.

Следствие 2. *Пусть* $n = m_1 = ... = m_k$ *и* $\pi^j_{kn,kn}(z; e^{\lambda_j \xi})$ *– аппроксимации Эрмита–Паде для системы экспонент* $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$, *где* $\lambda_j = b_j$ *– различные и отличные от нуля действительные числа. Тогда для любого комплексного* z, $|z| \le L$, *и* $j \in \{1, 2, ..., k\}$ *при* $n \to \infty$ *имеем*

$$e^{\lambda_j z} - \pi^j_{kn,kn}(z; e^{\lambda_j \xi}) =$$
$$= (-1)^{n(k+1)} sign(b_j) \frac{z^{kn+n+1}}{(kn+n)!} e^{\lambda_j z} e^{\frac{\sum_{p=0}^k \lambda_p}{k+1}} \times$$
$$\times \sum_p{}^* (-1)^{np} \sqrt{\frac{-2\pi}{nS''(x_p)}}\, e^{nS(x_p)} e^{-zx_p}(1 + O_p(1/n)),$$

где в $\sum_p^*$ *суммирование распространяется только на те значения* p *из* $\{1, 2, ..., k\}$, *для которых* x_p *лежат в интервале с концами в точках* 0 *и* b_j.

Для доказательства следствия 2 необходимо в теореме 1 положить $\beta = 0$, а $\alpha = 1$.

Рассмотрим также следствия теоремы 1, когда $k = 2$ и $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ лежат на мнимой оси и биссектрисе первого координатного угла.

Следствие 3. *Пусть* $\{e^{iz},\ e^{i2z}\}$ *– набор из двух экспонент и* $n = m_1 = m_2$. *Тогда для любого комплексного* z, $|z| \le L$, *при* $n \to \infty$ *имеем*

$$e^{iz} - \pi^1_{2n,2n}(z; e^{i\xi}) =$$
$$= (-i)^{n+3}\frac{z^{3n+1}}{(3n)!}e^{iz}\sqrt{\frac{2\pi}{9n}}\left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^n e^{iz/\sqrt{3}}(1+o(1)),$$

$$e^{i2z} - \pi^2_{2n,2n}(z; e^{i2\xi}) = (-i)^{n+3}\frac{z^{3n+1}}{(3n)!}e^{i2z}\sqrt{\frac{2\pi}{9n}}\left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^n \times$$
$$\times\left\{e^{iz/\sqrt{3}} + (-1)^n e^{-iz/\sqrt{3}}\right\}(1+o(1)).$$

Следствие 4. *Пусть* $\{e^{(1+i)z},\ e^{(2+i2)z}\}$ *– набор из двух экспонент и* $n = m_1 = m_2$. *Тогда для любого комплексного* z, $|z| \le L$, *при* $n \to \infty$ *имеем*

$$e^{(1+i)z} - \pi^1_{2n,2n}(z; e^{(1+i)\xi}) =$$
$$= (1+i)^{3n+1}\frac{z^{3n+1}}{(3n)!}e^{(1+i)z}\sqrt{\frac{2\pi}{9n}}\left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^n e^{(1+i)z/\sqrt{3}}(1+o(1)),$$

$$e^{(2+i2)z} - \pi^2_{2n,2n}(z; e^{(2+i2)\xi}) =$$
$$= (-1)^{3n}(1+i)^{3n+1}\frac{z^{3n+1}}{(3n)!}e^{(2+i2)z}\sqrt{\frac{2\pi}{9n}}\left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^n \times$$
$$\times\left\{e^{-(1+i)z/\sqrt{3}} + (-1)^n e^{(1+i)z/\sqrt{3}}\right\}(1+o(1)).$$

Для доказательства следствий 3 и 4 достаточно заметить, что при $k = 2$, $\lambda_j = ij$ или $\lambda_j = (1+i)j$, $j = 1,\ 2$, в теореме 1

$$\varphi(x) = x(x-1)(x-2),\quad x_1 = 1 - 1/\sqrt{3},\quad x_2 = 1 + 1/\sqrt{3},$$
$$S(x_1) = S(x_2) = \ln\left[2/\left(3\sqrt{3}\right)\right],\quad S''(x_1) = S''(x_2) = -9.$$

Доказательство теоремы 1. Будем рассматривать интегралы вида

$$F(\lambda) = \int_I f(x)e^{\lambda S(x)}dx, \qquad (5)$$

где I – или отрезок $[a; b]$, или интервал $(a; b)$, λ – вещественный параметр. Считается, что функция $S(x)$ принимает только действительные значения, в то время как функция $f(x)$ может быть и комплекснозначной. При этом функции $S(x)$, $f(x)$ непрерывны при $x \in I$. Будем рассматривать асимптотику интеграла $F(\lambda)$ при $\lambda \to +\infty$.

Приведем без доказательства следующие утверждения (см. [12]).

Утверждение 1. *Пусть* $I = (a; b)$ *– конечный или бесконечный интервал,* $S(x) \le c$ *при* $x \in I$ *и интеграл (5) сходится абсолютно при некотором* $\lambda_0 > 0$. *Тогда при* $\lambda \ge \lambda_0$

$$|F(\lambda)| \le c_1 e^{c\lambda},$$

где c_1 *– положительная постоянная.*

В дальнейшем нам понадобится лишь случай, когда $S(x)$ достигает наибольшего значения на отрезке $I = [a; b]$ в единственной точке, лежащей внутри этого отрезка.

Утверждение 2. *Пусть* $S(x) < S(x_0)$, $x \ne x_0$, $a < x_0 < b$, $S''(x_0) \ne 0$ *и функции* $f(x)$, $S(x)$ *бесконечно дифференцируемы в некоторой окрестности точки* x_0. *Тогда при* $\lambda \to +\infty$ *справедливо асимптотическое равенство*

$$F(\lambda) = \sqrt{-\frac{2\pi}{\lambda S''(x_0)}}\,e^{\lambda S(x_0)}\left\{f(x_0) + O\left(\lambda^{-1}\right)\right\}. \quad (6)$$

Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы 1.

При $p = 1, 2, ..., k$ определим интегралы

$$J^p(z) = \int_{(\alpha+i\beta)b^*_{p-1}}^{(\alpha+i\beta)b^*_p} \xi^n(\xi-\lambda_1)^n\ldots(\xi-\lambda_k)^n e^{-z\xi}d\xi, \quad (7)$$

в которых в качестве контура интегрирования возьмем отрезок, соединяющий точки $(\alpha+i\beta)b^*_{p-1}$ и $(\alpha+i\beta)b^*_p$. Интегралы $J^p(z)$ при достаточно больших n абсолютно сходятся. Проведем в интеграле (7) замену $\xi = (\alpha+i\beta)x$, $x \in (b^*_{p-1}; b^*_p)$, получим

$$J^p(z) = (\alpha+i\beta)^{n(k+1)+1} \times$$
$$\times\int_{b^*_{p-1}}^{b^*_p} x^n(x-b_1)^n\ldots(x-b_k)^n e^{-z(\alpha+i\beta)x}dx =$$
$$= (-1)^{(k+p+1)n}(\alpha+i\beta)^{n(k+1)+1} \times$$
$$\times\int_{b^*_{p-1}}^{b^*_p} e^{-z(\alpha+i\beta)x}e^{n\ln\left[(-1)^{k+p+1}\varphi(x)\right]}dx =$$
$$= (-1)^{(k+p+1)n}(\alpha+i\beta)^{n(k+1)+1}\int_{b^*_{p-1}}^{b^*_p} e^{-z(\alpha+i\beta)x}e^{n\,S(x)}dx.$$

Разобьем область интегрирования в последнем интеграле на три промежутка: $\left(b^*_{p-1}; b^*_{p-1}+\tau\right)$, $\left(b^*_{p-1}+\tau; b^*_p-\tau\right)$, $\left(b^*_p-\tau; b^*_p\right)$, где $0 < \tau < 1$ и выбрано так, что $x_p \in \left(b^*_{p-1}+\tau; b^*_p-\tau\right)$. Так как $S(x)$ на интервале $\left(b^*_{p-1};\ b^*_p\right)$ принимает наибольшее значение в единственной точке x_p, то в силу утверждения 1 несобственные интегралы по первому и третьему промежуткам экспоненциально малы по сравнению с $e^{nS(x_p)}$. Асимптотика интеграла по отрезку $\left[b^*_{p-1}+\tau;\ b^*_p-\tau\right]$ находится с помощью утверждения 2, если положить $f(x)=e^{-z(\alpha+i\beta)x}$. Тогда получим, что для любого комплексного z, $|z|\le L$, и $n\to\infty$

$$J^p(z)=(-1)^{(k+p+1)n}(\alpha+i\beta)^{n(k+1)+1}\sqrt{\frac{-2\pi}{nS''(x_p)}}\;e^{nS(x_p)}\times$$

$$\times e^{-z(\alpha+i\beta)x_p}\left(1+O_p\left(1/n\right)\right). \qquad (8)$$

Теперь рассмотрим остаточный член диагональных аппроксимаций Эрмита–Паде:

$$R^j_{kn,kn}(z)=\frac{e^{\lambda_j z}z^{kn+n+1}}{(kn+n)!}\int_0^{\lambda_j}\left[\xi^n\prod_{p=1}^{k}(\xi-\lambda_p)^n\right]e^{-z\xi}d\xi. \quad (9)$$

Легко заметить, что интегралы в (9) представимы в виде

$$I_j(z)=sign\left(b_j\right)\sum_p{}^{*}J^p(z),$$

где $\sum_p^*$ состоит только из тех интегралов $J^p(z)$, у которых область интегрирования $\left((\alpha+i\beta)b^*_{p-1};\,(\alpha+i\beta)b^*_p\right)$, где $\left(b^*_{p-1};\,b^*_p\right)\subset\left(0;\,b_j\right)$.

И тогда, учитывая (8), получим

$$R^j_{kn,kn}(z)=(-1)^{(k+1)n}(\alpha+i\beta)^{n(k+1)+1}\frac{z^{kn+n+1}}{(kn+n)!}e^{\lambda_j z}sign\left(b_j\right)\times$$

$$\times\sum_p{}^{*}(-1)^{np}\sqrt{\frac{-2\pi}{nS''(x_p)}}e^{nS(x_p)}e^{-z(\alpha+i\beta)x_p}\left(1+O_p\left(1/n\right)\right). \quad (10)$$

Заметим, что при $n=m_1=m_2=...=m_k$ и $n\to\infty$ из (3) найдем, что

$$Q_{kn}(z)=\exp\left\{-\frac{\sum_{p=1}^{k}\lambda_p}{k+1}z\right\}\left(1+O\left(1/n\right)\right). \quad (11)$$

Тогда утверждение теоремы легко получить из (10) и (11), учитывая, что

$$e^{\lambda_j z}-\pi^j_{kn,kn}(z;\,e^{\lambda_j\xi})=R^j_{kn,kn}(z)/Q_{kn}(z).$$

Теорема доказана.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Никишин, Е.М. Рациональные аппроксимации и ортогональность / Е.М. Никишин, В.Н. Сорокин. – М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 256 с.
2. Hermite, C. Sur la function exponentielle / C. Hermite // C.R. Akaf – Sci (Paris). – 1873. – Vol. 77. – P. 18–293.
3. Клейн, Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей / Ф. Клейн. – М.–Л., 1933. − 324 с.
4. Mahler, K. On the approximation of logarithms of algebraic numbers / K. Mahler // Philos. Trans. Roy. Sos. London. Ser. A. – 1953. – Vol. 245. – P. 371–398.
5. Калягин, В.А. Аппроксимации Эрмита–Паде и спектральный анализ несимметричных разностных операторов / В.А. Калягин // Матем. сборник. – 1994. – Т. 185, № 6. – С. 79–100.
6. Бейкер, Дж. Аппроксимации Паде / Дж. Бейкер мл., П. Грейвс-Моррис. – М.: Мир, 1986. – 502 с.
7. Van Assche, W. Continued fractions: from analytic number theory to constructive approximation / W. Van Assche // Contemp. Math., Amer. Math. Soc. – 1999. – Vol. 236. – P. 325–342.
8. Аптекарев, А.И. Рациональные приближения постоянной Эйлера и рекуррентные соотношения: сб. ст. // Совр. пробл. матем. / А.И. Аптекарев (ред.). – М.: МИАН, 1988. – Т. 9.
9. Аптекарев, А.И. О сходимости рациональных аппроксимаций к набору экспонент / А.И. Аптекарев // Вестн. МГУ. Сер. 1, Математика. Механика. – 1981. – № 1. – С. 68–74.
10. Старовойтов, А.П. О свойствах аппроксимаций Эрмита–Паде для системы функций Миттаг–Леффлера / А.П. Старовойтов // Докл. НАН Беларуси. – 2013. – Т. 57, № 1. – С. 5–10.
11. Старовойтов, А.П. Об асимптотике аппроксимаций Эрмита–Паде для системы функций Миттаг–Леффлера / А.П. Старовойтов // Изв. вузов. матем. – 2014. – № 9. – С. 59–68.
12. Сидоров, Ю.В. Лекции по теории функций комплексного переменного: учеб. для вузов. – 3-е изд. / Ю.В. Сидоров, М.В. Федорюк, М.И. Шабунин. – М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 480 с.

R E F E R E N C E S

1. Nikishin E.M., Sorokin V.N. *Ratsionalniye approximatsii i ortogonalnost* [Rational Approximants and Ortogonality], M., Nauka, gl. red. fiz.-mat. lit., 1988, 256 p.
2. Hermite C. Sur la function exponentielle / C. Hermite // C.R. Akaf – Sci(Paris). – 1873. – Vol. 77. – P. 18–293.
3. Klein, F. *Elementarnaya matematika s tochki zreniya visshei* [Elementary Mathematics from the Point of View of Higher], M.–L., 1933, 324 p.
4. Mahler, K. On the approximation of logarithms of algebraic numbers / K. Mahler // Philos. Trans. Roy. Sos. London. Ser. A. – 1953. – Vol. 245. – P. 371–398.
5. Kaliagin V.A. *Matem. sbornik* [Mathematics Collection], 1994, 185 (6), pp. 79–100.
6. Baker J., Graves-Morris P. *Pade approksimatsii* [Pade Approximants], M., Mir, 1986, 502 p.
7. Van Assche W. *Continued fractions: from analytic number theory to constructive approximation* / W. Van Assche // Contemp. Math., Amer. Math. Soc. – 1999. – Vol. 236. – P. 325–342.
8. Aptekarev A.I. *Sbornik statei. Sovr. probl. matem.* [Collection of articles. Contemporary Issues of Mathematics], M., MIAN, 1988, 9.
9. Aptekarev A.I. *Vestn. MGU Ser. 1. Matematika. Mekhanika* [Newsletter of MSU. Ser. 1. Mathematics. Mechanics.], 1981, 1, pp. 68–74.
10. Starovoitov A.P. *Dokl. NAN Belarusi* [Reports of NAS of Belarus], 2013, 57 (1), pp. 5–10.
11. Starovoitov A.P. *Izv. vuzov. Matem.* [Newsletter of Universities. Mathematics.], 2014, 9, pp. 59–68.
12. Sidorov Yu.V., Fedoriuk M.V., Shabunin M.I. *Lektsii po teorii funktsii kompleksnogo peremennogo: Ucheb. dlia vuzov* [Lectures on Theory of Functions of Complex Changeable: University Textbook], M., Nauka, gl. red. fiz.-mat. lit., 1989, 480 p.

Поступила в редакцию 02.07.2015

Адрес для корреспонденции: e-mail: avastafeva@mail.ru – Герман А.В.