УДК 517.95

Локальное существование решений начально-краевой задачи для системы полулинейных параболических уравнений с нелинейными нелокальными граничными условиями

А.И. Никитин
Учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»

В работе рассматривается начально-краевая задача для системы полулинейных параболических уравнений с нелинейными нелокальными граничными условиями.

Цель статьи – исследование локального существования решений начально-краевой задачи.

***Материал и методы.** В данной работе используются методы теории дифференциальных уравнений с частными производными.*

***Результаты и их обсуждение.** Установлено локальное существование неотрицательного решения начально-краевой задачи для системы полулинейных параболических уравнений с нелинейными нелокальными граничными условиями. Доказана теорема сравнения решений начально-краевой задачи с неотрицательными начальными данными, а также положительность решения с нетривиальными начальными данными. Установлена единственность решения исходной задачи с нетривиальными неотрицательными начальными данными, если $\min(p,q,m,n)\geq 1$, и с положительными начальными данными, если $\min(p,q,m,n)<1$.*

***Заключение.** Результаты работы могут быть использованы при изучении дифференциальных уравнений с частными производными.*

***Ключевые слова:** локальное существование, теорема сравнения, полулинейные параболические уравнения, нелокальные граничные условия.*

Local Existence of Solutions of the Initial-Boundary Value Problem for the System of Semilinear Parabolic Equations with Nonlinear Nonlocal Boundary Conditions

A.I. Nikitin
Educational Establishment «Vitebsk State University named after P.M. Masherov»

We consider the initial-boundary value problem for the system of semilinear parabolic equations with nonlocal boundary conditions.

The aim of this work is to study the local existence of solutions of the initial-boundary value problem.

***Material and methods.** In this paper we use the methods of the theory of partial differential equations.*

***Findings and their discussion.** The paper established the local existence of nonnegative solutions of the initial-boundary value problem for semi linear parabolic equations with nonlocal boundary conditions. The comparison principle of initial-boundary value problem with nonnegative initial data is proven, as well as positivity of the solution with non trivial initial parameters. Uniqueness of the solution of initial problem with non trivial non negative initial data, when $\min(p,q,m,n)\geq 1$, and with positive initial data, when $\min(p,q,m,n)<1$ is established.*

***Conclusion.** The findings can be used to study partial differential equations.*

***Key words:** local existence, comparison principle, semilinear parabolic equations, nonlocal boundary conditions.*

Репозиторий ВГУ

В данной работе рассматривается начально-краевая задача для системы полулинейных параболических уравнений с нелинейными нелокальными граничными условиями:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + c_1(x,t)v^p, v_t = \Delta v + c_2(x,t)u^q, x \in \Omega, t > 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = \int\limits_{\Omega} k_1(x,y,t)u^m(y,t)dy, x \in \partial\Omega, t > 0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial \eta} = \int\limits_{\Omega} k_2(x,y,t)v^n(y,t)dy, x \in \partial\Omega, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), v(x,0) = v_0(x), x \in \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

где p, q, m, n – положительные постоянные, Ω – ограниченная область в R^N, $N \geq 1$, с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, η – единичная внешняя нормаль к $\partial\Omega$, $c_1(x,t)$, $c_2(x,t)$ – неотрицательные локально непрерывные по Гельдеру функции, определенные при $x \in \Omega, t \geq 0$, $k_1(x,y,t)$, $k_2(x,y,t)$ – неотрицательные непрерывные функции, определенные при $x \in \partial\Omega, y \in \overline{\Omega}, t \geq 0$, $u_0(x)$, $v_0(x)$ – неотрицательные непрерывные функции, удовлетворяющие граничным условиям при $t=0$.

В последние несколько десятилетий многие физические явления были сформулированы в нелокальных математических моделях. Начально-краевые задачи для полулинейных параболических уравнений и систем уравнений с нелокальными граничными условиями проанализированы многими авторами (см., например, [1–4] и ссылки в них). Рассмотрены локальное и глобальное существование, принцип сравнения, а также различные качественные свойства решений.

Заметим, что для нелинейностей в задаче (1) условие Липшица может быть не выполнено. Проблема единственности и неединственности для различных нелинейных параболических уравнений и систем уравнений с нелипшицевыми данными решена несколькими авторами (см., например, [5–6] для уравнений и [7–9] для систем).

Цель статьи – исследование локального существования решений начально-краевой задачи (1).

1. Теорема сравнения решений. Введем определение верхнего и нижнего решений задачи. Пусть $Q_T = \Omega \times (0,T), S_T = \partial\Omega \times (0,T)$, $\Gamma_T = S_T \bigcup \overline{\Omega} \times \{0\}$.

Определение 1. *Пара неотрицательных функций* (u,v) *называется нижним решением задачи* (1) *в* Q_T, *если* $u, v \in C^{2,1}(Q_T) \bigcap C^{1,0}(Q_T \bigcup \Gamma_T)$ *и*

$$\begin{cases} u_t \leq \Delta u + c_1(x,t)v^p, v_t \leq \Delta v + c_2(x,t)u^q, (x,t) \in Q_T, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} \leq \int\limits_{\Omega} k_1(x,y,t)u^m(y,t)dy, (x,t) \in S_T, \\ \dfrac{\partial v}{\partial \eta} \leq \int\limits_{\Omega} k_2(x,y,t)v^n(y,t)dy, (x,t) \in S_T, \\ u(x,0) \leq u_0(x), v(x,0) \leq v_0(x), x \in \Omega. \end{cases} \tag{2}$$

Пара неотрицательных функций (u,v) *называется верхним решением задачи* (1) *в* Q_T, *если* $u, v \in C^{2,1}(Q_T) \bigcap C^{1,0}(Q_T \bigcup \Gamma_T)$ *и выполняется* (2) *с неравенствами противоположных знаков.*

Определение 2. *Пара неотрицательных функций* (u,v) *называется решением задачи* (1) *в* Q_T, *если она одновременно является нижним и верхним решениями задачи* (1).

Теорема 1. *Пусть* $(\overline{u},\overline{v})$ *и* $(\underline{u},\underline{v})$ *– верхнее и нижние решения задачи* (1) *в* Q_T, *соответственно. Предположим, что* $\overline{u} > 0, \overline{v} > 0$ *или* $\underline{u} > 0, \underline{v} > 0$ *в* $Q_T \bigcup \Gamma_T$ *при* $\min(p,q,m,n)<1$. *Тогда* $\overline{u} \geq \underline{u}, \overline{v} \geq \underline{v}$ *в* $Q_T \bigcup \Gamma_T$.

Доказательство. Пусть $\xi(x,t) \in C^{2,1}(\overline{Q}_T)$ – неотрицательная функция такая, что $\partial\xi / \partial\eta |_{S_T} = 0$. По определению нижнего решения имеем

$$\underline{u}_t \leq \Delta \underline{u} + c_1(x,t)\underline{v}^p, x \in \Omega, 0 < t < T. \tag{3}$$

Умножив (3) на $\xi(x,t)$ и проинтегрировав по Q_t для $0<t<T$, получим

$$\int\limits_{\Omega} \underline{u}(x,t)\xi(x,t)dx \leq \int\limits_{\Omega} \underline{u}(x,0)\xi(x,0)dx + \\ + \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega} (\underline{u}\xi_\tau + \underline{u}\Delta\xi + c_1(x,\tau)\underline{v}^p\xi)dxd\tau + \\ + \int\limits_0^t \int\limits_{\partial\Omega} \xi \int\limits_{\Omega} k_1(x,y,\tau)\underline{u}^m(y,\tau)dydsd\tau. \tag{4}$$

Применив аналогичные преобразования для верхнего решения, имеем

$$\int\limits_{\Omega} \overline{u}(x,t)\xi(x,t)dx \geq \int\limits_{\Omega} \overline{u}(x,0)\xi(x,0)dx + \\ + \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega} (\overline{u}\xi_\tau + \overline{u}\Delta\xi + c_1(x,\tau)\overline{v}^p\xi)dxd\tau + \\ + \int\limits_0^t \int\limits_{\partial\Omega} \xi \int\limits_{\Omega} k_1(x,y,\tau)\overline{u}^m(y,\tau)dydsd\tau. \tag{5}$$

Вычтем (5) из (4). В результате получим

Репозиторий ВГУ

$$\int_\Omega (\underline{u}-\overline{u})\xi(x,t)dx \le \int_\Omega (\underline{u}(x,0)-\overline{u}(x,0))\xi(x,0)dx +$$
$$+\int_0^t\int_\Omega ((\underline{u}-\overline{u})(\xi_\tau+\Delta\xi)+c_1(x,\tau)(\underline{v}^p-\overline{v}^p)\xi)dxd\tau +$$
$$+\int_0^t\int_{\partial\Omega}\xi\int_\Omega k_1(x,y,\tau)(\underline{u}^m(y,\tau)-\overline{u}^m(y,\tau))dydsd\tau . \quad (6)$$

По теореме Лагранжа $\underline{v}^p-\overline{v}^p = p\Theta_1^{p-1}(\underline{v}-\overline{v})$ и $\underline{u}^m-\overline{u}^m = m\Theta_2^{m-1}(\underline{u}-\overline{u})$, где Θ_1,Θ_2 – непрерывные неотрицательные функции при $\min(p,q,m,n)\ge 1$ и непрерывные положительные функции при $\min(p,q,m,n)<1$ в $\overline{Q}_T$.

Обозначим

$\omega(x,t)=\underline{u}(x,t)-\overline{u}(x,t), z(x,t)=\underline{v}(x,t)-\overline{v}(x,t)$.

Тогда

$$\int_\Omega \omega(x,t)\xi(x,t)dx \le \int_\Omega \omega(x,0)\xi(x,0)dx +$$
$$+\int_0^t\int_\Omega \omega(\xi_\tau+\Delta\xi)dxd\tau + \int_0^t\int_\Omega z(x,\tau)pc_1(x,\tau)\Theta_1^{p-1}\xi dxd\tau +$$
$$+\int_0^t\int_{\partial\Omega}\xi\int_\Omega k_1(x,y,\tau)m\Theta_2^{m-1}\omega(y,\tau)dydsd\tau . \quad (7)$$

Рассмотрим в Q_t следующую задачу:

$$\begin{cases} \xi_\tau+\Delta\xi=0, (x,\tau)\in Q_t, \\ \dfrac{\partial\xi}{\partial\eta}=0, (x,\tau)\in S_t, \\ \xi(x,t)=\psi(x), x\in\Omega, \end{cases}$$

где $\psi(x)\in C_0^\infty(\overline{\Omega})$, $0\le\psi\le 1$. Из принципа сравнения для линейных параболических уравнений следует, что решение $\xi(x,t)$ данной задачи неотрицательно и ограничено, то есть $\xi\le M_1$, $M_1\ge 0$.

Очевидно, что существует постоянная M_2 такая, что $\Theta_1^{p-1}\le M_2$, $\Theta_2^{m-1}\le M_2$ в Q_T. Так как $c_1(x,t)$, $k_1(x,y,t)$ – неотрицательные и непрерывные функции, то существует постоянная $M_3>0$ такая, что $0\le c_1(x,t)\le M_3$, $0\le k_1(x,y,t)\le M_3$ в $\overline{Q}_T$ и $\partial\Omega\times\overline{Q}_T$, соответственно.

Обозначим $s_+=\max(s,0)$. Так как $\overline{u}(x,0)\ge\underline{u}(x,0)$, то $\omega_+(x,0)\equiv 0$. Тогда из (7) получим

$$\int_\Omega \omega(x,t)\psi(x)dx \le K_1\int_0^t\int_\Omega z_+(x,\tau)dxd\tau + \quad (8)$$
$$+K_2\int_0^t\int_\Omega \omega_+(y,\tau)dyd\tau,$$

где $K_1=pM_1M_2M_3$, $K_2=mM_1M_2M_3|\partial\Omega|$ и $|\partial\Omega|$ – мера Лебега множества $\partial\Omega$.

Рассмотрим последовательность функций $\{\phi_n(x)\}$, $\phi_n(x)\in C_0^\infty(\overline{\Omega}), 0\le\phi_n\le 1$, сходящуюся к $\phi(x)$ в $L^1(\Omega)$, которая определена следующим образом:

$\phi(x)=1$, если $\omega(x)>0$,

$\phi(x)=0$, если $\omega(x)\le 0$.

Заменив $\psi(x)$ на $\phi_n(x)$ и перейдя к пределу при $n\to\infty$, имеем

$$\int_\Omega \omega_+(x,t)dx \le K_1\int_0^t\int_\Omega z_+(x,\tau)dxd\tau + \quad (9)$$
$$+K_2\int_0^t\int_\Omega \omega_+(y,\tau)dyd\tau.$$

Используя аналогичные преобразования для неравенства $\underline{v}\le\Delta\underline{v}+c_2(x,t)\underline{u}^q$, $x\in\Omega$, $0<t<T$, можем получить

$$\int_\Omega z_+(x,t)dx \le K_3\int_0^t\int_\Omega \omega_+(x,\tau)dxd\tau +$$
$$+K_4\int_0^t\int_\Omega z_+(y,\tau)dyd\tau, \quad (10)$$

где K_3, K_4 – некоторые положительные постоянные. Сложив (9) и (10), имеем

$$\int_\Omega (\omega_+(x,t)+z_+(x,t))dx \le$$
$$\le K_5\int_0^t\int_\Omega (\omega_+(x,\tau)+z_+(x,\tau))dxd\tau,$$

где $K_5=\max(K_1+K_4,K_2+K_3)$. По лемме Гронуолла получаем, что

$$\int_\Omega (\omega_+(x,t)+z_+(x,t))dx \le 0 .$$

Поскольку $\omega_+ + z_+ \ge 0$,

то $\underline{u}(x,t)-\overline{u}(x,t)\le 0, \underline{v}(x,t)-\overline{v}(x,t)\le 0.$

Теорема 1 доказана.

2. Локальное существование решений. Пусть $\{\varepsilon_l\}$ – убывающая, стремящаяся к 0, последовательность такая, что $0<\varepsilon_l<1$. Для $\varepsilon=\varepsilon_l$ пусть $u_{0\varepsilon}, v_{0\varepsilon}$ – функции со следующими свойствами:

1. $u_{0\varepsilon}, v_{0\varepsilon}\in C(\overline{\Omega}), u_{0\varepsilon}\ge\varepsilon, v_{0\varepsilon}\ge\varepsilon$.
2. $u_{0\varepsilon_i}\ge u_{0\varepsilon_j}, v_{0\varepsilon_i}\ge v_{0\varepsilon_j}$ для $\varepsilon_i\ge\varepsilon_j$.
3. $u_{0\varepsilon}\to u_0, v_{0\varepsilon}\to v_0$ при $\varepsilon\to 0$.
4. $\dfrac{\partial u_{0\varepsilon}(x)}{\partial\eta}=\int_\Omega k_1(x,y,0)u_{0\varepsilon}^m(y)dy$,

Репозиторий ВГУ

$$\frac{\partial v_{0\varepsilon}(x)}{\partial \eta} = \int_{\Omega} k_2(x,y,0) v_{0\varepsilon}^n(y)dy .$$

Для нелинейности в исходной задаче условие Липшица может быть не выполнено. Поэтому рассмотрим вспомогательную задачу:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + c_1(x,t)v^p, v_t = \Delta v + c_2(x,t)u^q, x \in \Omega, t > 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = \displaystyle\int_{\Omega} k_1(x,y,t)u^m(y,t)dy, x \in \partial\Omega, t > 0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial \eta} = \displaystyle\int_{\Omega} k_2(x,y,t)v^n(y,t)dy, x \in \partial\Omega, t > 0, \\ u(x,0) = u_{0\varepsilon}(x), v(x,0) = v_{0\varepsilon}(x), x \in \Omega. \end{cases} \tag{11}$$

Теорема 2. *Для малых значений T задача* (11) *имеет единственное решение в Q_T.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Построим верхнее решение для задачи (11). Пусть $\sup\limits_{\overline{\Omega}} u_{0\varepsilon} \le C,$ $\sup\limits_{\overline{\Omega}} v_{0\varepsilon} \le C, C > 0.$

Обозначим $M = \max(\sup\limits_{Q_T} c_1(x,t), \sup\limits_{Q_T} c_2(x,t),$ $\sup\limits_{\partial\Omega\times Q_T} k_1(x,y,t), \sup\limits_{\partial\Omega\times Q_T} k_2(x,y,t)).$

Введем также вспомогательную функцию $\varphi(x)$ со следующими свойствами:

$$\varphi(x) \in C^2(\overline{\Omega}), \inf_{\Omega} \varphi(x) \ge 1,$$

$$\inf_{\partial\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \ge \overline{M} \int_{\Omega} \max(\varphi^m(y), \varphi^n(y))dy,$$

где

$$\overline{M} = M \max(C^{m-1}, C^{n-1}) \max(1, \exp(m-1), \exp(n-1)).$$

Пусть α, β – такие положительные константы, что

$$\alpha \ge \sup_{\Omega}(\frac{\Delta\varphi}{\varphi} + MC^{p-1}\exp(1)\varphi^{p-1}),$$

$$\beta \ge \sup_{\Omega}(\frac{\Delta\varphi}{\varphi} + MC^{q-1}\exp(1)\varphi^{q-1}).$$

Выберем такие α, β, что $\alpha q - \beta = \beta p - \alpha$, *и* $\alpha q - \beta > 0$ при $pq > 1$. Очевидно, что пара функций $(\varepsilon, \varepsilon)$ является нижним решением задачи (11). Покажем, что

$$f(x,t) = C\exp(\alpha t)\varphi(x),$$
$$g(x,t) = C\exp(\beta t)\varphi(x) \tag{12}$$

– верхнее решение задачи (11) в области Q_T при $T \le \min(1, \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\alpha q - \beta})$, если $pq > 1$, и $T \le \min(1, \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta})$, если $pq \le 1$. Действительно,

$$f_t(x,t) - \Delta f(x,t) - c_1(x,t)g^p(x,t) =$$
$$= \alpha C\exp(\alpha t)\varphi(x) - \Delta\varphi C\exp(\alpha t) -$$
$$- c_1(x,t)C^p\exp(\beta pt)\varphi^p(x,t) =$$
$$= C\exp(\alpha t)\varphi(x)(\alpha - \frac{\Delta\varphi}{\varphi} -$$
$$- MC^{p-1}\exp((\beta p - \alpha)t)\varphi^{p-1}) \ge 0.$$

Для $(x,t) \in Q_T$. С другой стороны, получаем, что

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial \eta} = C\exp(\alpha t)\frac{\partial \varphi(x)}{\partial \eta} \ge$$
$$\ge C^m\exp(\alpha mt)M\int_{\Omega}\varphi^m(y)dy \ge \int_{\Omega} k_1(x,y,t)f^m(y,t)dy,$$

для $(x,t) \in S_T$. Аналогично можно показать, что

$$g_t(x,t) - \Delta g(x,t) - c_2(x,t)f^q(x,t) \ge 0, \text{ для } (x,t) \in Q_T,$$

$$\frac{\partial g(x,t)}{\partial \eta} \ge \int_{\Omega} k_2(x,y,t)g^n(y,t)dy, \text{ для } (x,t) \in S_T.$$

Для доказательства существования решения (11) определим множество

$$B = \{(h_1(x,t), h_2(x,t)) \in C(\overline{Q}_T) \times C(\overline{Q}_T):$$
$$\varepsilon \le h_1(x,t) \le f(x,t), \varepsilon \le h_2(x,t) \le g(x,t),$$
$$h_1(x,0) = u_{0\varepsilon}, h_2(x,0) = v_{0\varepsilon}\}.$$

Очевидно, что B – непустое выпуклое подмножество множества $C(\overline{Q}_T) \times C(\overline{Q}_T)$. Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + c_1(x,t)v^p, v_t = \Delta v + c_2(x,t)u^q, x \in \Omega, t > 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = \displaystyle\int_{\Omega} k_1(x,y,t)s_1^m(y,t)dy, x \in \partial\Omega, t > 0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial \eta} = \displaystyle\int_{\Omega} k_2(x,y,t)s_2^n(y,t)dy, x \in \partial\Omega, t > 0, \\ u(x,0) = u_{0\varepsilon}(x), v(x,0) = v_{0\varepsilon}(x), x \in \Omega, \end{cases} \tag{13}$$

где $(s_1, s_2) \in B$. Задача (13) имеет нетривиальное положительное решение. Пусть A – отображение такое, что $A(s_1, s_2) = (u, v)$. Покажем, что A имеет неподвижную точку в B. Для этого убедимся в том, что A непрерывно отображает B само в себя и AB – предкомпактное множество. Благодаря принципу сравнения для (13) имеем, что A отображает множество B в себя.

Пусть $G(x,y;t)$ – функция Грина задачи

$$u_t - \Delta u = 0, x \in \Omega, t > 0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, x \in \partial\Omega, t > 0.$$

Тогда (u, v) является решением (13) тогда и только тогда, когда выполнены следующие равенства:

Репозиторий ВГУ

$$u(x,t)=\int_\Omega G(x,y;t)u_{0\varepsilon}dy+$$
$$+\int_0^t\int_\Omega G(x,y;t-\tau)c_1(y,\tau)v^p(y,\tau)dyd\tau+ \qquad (14)$$
$$+\int_0^t\int_{\partial\Omega} G(x,\xi;t-\tau)\int_\Omega k_1(\xi,y,\tau)s_1^m(y,\tau)dyd\xi d\tau,$$
$$v(x,t)=\int_\Omega G(x,y;t)v_{0\varepsilon}dy+$$
$$+\int_0^t\int_\Omega G(x,y;t-\tau)c_2(y,\tau)u^q(y,\tau)dyd\tau+ \qquad (15)$$
$$+\int_0^t\int_{\partial\Omega} G(x,\xi;t-\tau)\int_\Omega k_2(\xi,y,\tau)s_2^n(y,\tau)dyd\xi d\tau.$$

Отсюда заключаем, что A – непрерывное отображение. В самом деле, пусть $\{(s_{1k},s_{2k})\}$ – последовательность в B, сходящаяся к $(s_1,s_2)\in B$ в $C(\overline{Q}_T)\times C(\overline{Q}_T)$. Обозначим $(u_k,v_k)=A(s_{1k},s_{2k})$. Тогда видим, что

$$|u-u_k|+|v-v_k|\le$$
$$\le\int_0^t\int_\Omega G(x,y;t-\tau)c_1(y,\tau)|v^p-{v_k}^p|dyd\tau+$$
$$+\int_0^t\int_\Omega G(x,y;t-\tau)c_2(y,\tau)|u^q-{u_k}^q|dyd\tau+$$
$$+\int_0^t\int_{\partial\Omega} G(x,\xi;t-\tau)\int_\Omega k_1(\xi,y,\tau)dyd\xi d\tau\sup_{Q_T}|s_1^m-s_{1k}^m|+$$
$$+\int_0^t\int_{\partial\Omega} G(x,\xi;t-\tau)\int_\Omega k_2(\xi,y,\tau)dyd\xi d\tau\sup_{Q_T}|s_2^n-s_{2k}^n|\le$$
$$\le r(\sup_{Q_T}|u-u_k|+\sup_{Q_T}|v-v_k|)+$$
$$+\int_0^t\int_{\partial\Omega} G(x,\xi;t-\tau)\int_\Omega k_1(\xi,y,\tau)dyd\xi d\tau\sup_{Q_T}|s_1^m-s_{1k}^m|+$$
$$+\int_0^t\int_{\partial\Omega} G(x,\xi;t-\tau)\int_\Omega k_2(\xi,y,\tau)dyd\xi d\tau\sup_{Q_T}|s_2^n-s_{2k}^n|,$$

где $r=\max(\Theta_1,\Theta_2)$ и

$$\Theta_1=p\max(\varepsilon^{p-1},\sup_{Q_T}(h_1^{p-1}(x,t)))\times$$
$$\times\sup_{Q_T}\int_0^t\int_\Omega G(x,y;t-\tau)c_1(y,\tau)dyd\tau,$$
$$\Theta_2=q\max(\varepsilon^{q-1},\sup_{Q_T}(h_2^{q-1}(x,t)))\times$$
$$\times\sup_{Q_T}\int_0^t\int_\Omega G(x,y;t-\tau)c_2(y,\tau)dyd\tau.$$

Выберем такое T, чтобы $r<1$. Тогда получим, что при $k\to\infty$ $(u_k,v_k)\to(u,v)$ в $C(\overline{Q}_T)\times C(\overline{Q}_T)$. Равномерная непрерывность AB следует из (14), (15) и свойств функции Грина. Теорема Арцела–Асколи дает предкомпактность AB. Тогда, применяя теорему Тихонова–Шаудера, получаем, что A имеет неподвижную точку в B, если T достаточно мало. Единственность решения следует из принципа сравнения. Теорема 2 доказана.

Применяя данную теорему, можно доказать следующую локальную теорему существования решения задачи (1).

Теорема 3. *Для малых значений T задача* (1) *имеет максимальное решение в Q_T.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon_2>\varepsilon_1$. Легко показать, что $(u_{\varepsilon_2}(x,t),v_{\varepsilon_2}(x,t))$ – верхнее решение для задачи (11) с $\varepsilon=\varepsilon_1$. Тогда $u_{\varepsilon_1}(x,t)\le u_{\varepsilon_2}(x,t), v_{\varepsilon_1}(x,t)\le v_{\varepsilon_2}(x,t)$. Используя эти неравенства и принцип продолжения решения, получаем, что время существования решения $(u_\varepsilon(x,t),v_\varepsilon(x,t))$ не уменьшается при $\varepsilon\to 0$. Пусть $\varepsilon\to 0$, тогда

$$u_{\max}(x,t)=\lim_{\varepsilon\to 0}u_\varepsilon(x,t)\ge 0,$$
$$v_{\max}(x,t)=\lim_{\varepsilon\to 0}v_\varepsilon(x,t)\ge 0,$$

причем $(u_{\max}(x,t),v_{\max}(x,t))$ существует в Q_T для некоторого T>0.

Так как $(u_\varepsilon(x,t),v_\varepsilon(x,t))$ удовлетворяет (11), то, используя теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, находим, что $(u_{\max}(x,t),v_{\max}(x,t))$ должно удовлетворять следующим равенствам:

$$u_{\max}(x,t)=\int_\Omega G(x,y;t)u_0(y)dy+$$
$$+\int_0^t\int_\Omega G(x,y;t-\tau)c_1(y,\tau)v_{\max}^p(y,\tau)dyd\tau+$$
$$+\int_0^t\int_{\partial\Omega} G(x,\xi;t-\tau)\int_\Omega k_1(\xi,y,\tau)u_{\max}^m(y,\tau)dyd\xi d\tau,$$
$$v_{\max}(x,t)=\int_\Omega G(x,y;t)v_0(y)dy+$$
$$+\int_0^t\int_\Omega G(x,y;t-\tau)c_2(y,\tau)u_{\max}^q(y,\tau)dyd\tau+$$
$$+\int_0^t\int_{\partial\Omega} G(x,\xi;t-\tau)\int_\Omega k_2(\xi,y,\tau)v_{\max}^n(y,\tau)dyd\xi d\tau.$$

Регулярность $(u_{\max}(x,t),v_{\max}(x,t))$ следует из непрерывности в Q_T, непрерывности функции Грина и ее производных. Очевидно, что $(u_{\max}(x,t),v_{\max}(x,t))$ удовлетворяет исходной системе. Пусть $(y_1(x,t),y_2(x,t))$ – любое другое

Репозиторий ВГУ

решение задачи. Тогда по принципу сравнения $u_\varepsilon(x,t) \ge y_1(x,t)$, $v_\varepsilon(x,t) \ge y_2(x,t)$. Устремив $\varepsilon \to 0$, получим, что $u_{\max}(x,t) \ge y_1(x,t)$, $v_{\max}(x,t) \ge y_2(x,t)$. Теорема 3 доказана.

Теорема 4. *Пусть* $u_0(x)$ *или* $v_0(x)$ *– нетривиальная функция в области* Ω, $c_1(x,t)$ *– нетривиальная функция в* Q_τ *для любого* $\tau>0$*, если* $u_0(x)\equiv0$*, и* $c_2(x,t)$ *– нетривиальная функция в* Q_τ *для любого* $\tau>0$*, если* $v_0(x)\equiv0$*. Если* $(u(x,t),v(x,t))$ *– решение задачи* (1)*, то* $u(x,t)>0, v(x,t)>0$ *в* $Q_T \cup S_T$ *для* $0<t<T$*.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим для определенности, что $u_0(x)$ – нетривиальная функция. Так как $u_t - \Delta u = c_1(x,t)v^p \ge 0$ в Q_T, то минимум $u(x,t)$ *в* $Q_T \cup S_T$ может быть достигнут только на параболической границе по строгому принципу максимума. Значит, $u(x,t)>0$ в области Q_T. Покажем, что $u(x,t)>0$ на S_T. Пусть существует точка $(x_0,t_0)\in S_T$ такая, что $u(x_0,t_0)=0$. Тогда, ввиду теоремы 3.6 из [10], $\partial u(x_0,t_0)/\partial\eta<0$, что противоречит граничному условию задачи (1). Теперь покажем, что $v(x,t)>0$ в $Q_T \cup S_T$. Если $v_0(x)$ – нетривиальная функция, то $v(x,t)>0$ *в* $Q_T \cup S_T$ для $0<t<T$, используя предыдущие рассуждения для $u(x,t)$. Если $v_0(x)\equiv0$, то предположим, что существует постоянная $\tau>0$ такая, что $v(x,t)\equiv0$ в Q_τ, иначе мы можем воспользоваться рассуждениями из начала доказательства снова. Но это противоречит второму уравнению (1), так как $u(x,t)>0$ в Q_τ и $c_2(x,t)$ – нетривиальная функция в Q_τ для любого $\tau>0$. Следовательно, мы заключаем, что $v(x,t)>0$ в $Q_T \cup S_T$ для $0<t<T$. Теорема 4 доказана.

Из теоремы 1 и теоремы 4 можно легко получить следующий результат.

Теорема 5. *Задача* (1) *с нетривиальными неотрицательными начальными данными, если* $\min(p,q,m,n)\ge1$*, и с положительными начальными данными, если* $\min(p,q,m,n)<1$*, имеет единственное решение в* Q_T*.*

Заключение. В данной работе установлено локальное существование неотрицательного максимального решения задачи (1) для достаточно малых значений времени. Также доказана теорема сравнения для неотрицательных решений задачи при $\min(p,q,m,n)\ge1$ и положительных решений при $\min(p,q,m,n)<1$, получены достаточные условия единственности решений начально-краевой задачи (1).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Chen, B. A quasilinear parabolic system with nonlocal boundary condition / B. Chen, Y. Mi, C. Mu // Boundary Value Problems. – 2011. – Article ID 750769. – 18 p.
2. Deng, K. Comparison principle for some nonlocal problems / K. Deng // Quarterly of Applied Mathematics. – 1992. – Vol. 50, no. 3. – P. 517–522.
3. Gladkov, A.L. Blow-up of solutions for semilinear heat equation with nonlinear nonlocal boundary condition / A.L. Gladkov, K.I. Kim // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2008. – Vol. 338, no. 1. – P. 264–273.
4. Souplet, P. Uniform blow-up profiles and boundary behavior for diffusion equations with nonlocal nonlinear source / P. Souplet // Journal of Differential Equations. – 1999. – Vol. 153, no. 2. – P. 374–406.
5. Cortazar, C. Uniqueness and non-uniqueness for the porous medium equation with nonlinear boundary condition / C. Cortazar, M. Elqueta, J.D. Rossi // Differential and Integral Equations. – 2003. – Vol. 16, no. 10. – P. 1215–1222.
6. Gladkov, A.L. Uniqueness and nonuniqueness for reaction-diffusion equation with nonlocal boundary condition / A.L. Gladkov, K.I. Kim // Advances in Mathematical Sciences and Applications. – 2009. – Vol. 19. – P. 39–49.
7. Cortazar, C. Uniqueness and non-uniqueness for a system of heat equations with nonlinear coupling at the boundary / C. Cortazar, M. Elqueta, J.D. Rossi // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. – 1999. – Vol. 37, no. 2. – P. 257–267.
8. Dickstein, F. A maximum principle for semilinear parabolic systems and applications / F. Dickstein, M. Escobedo // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. – 2001. – Vol. 45, no. 7. – P. 825–837.
9. Escobedo, M.A semilinear parabolic system in a bounded domain / M. Escobedo, M.A. Herrero // Annali di Matematica Pura ed Applicata. – 1993. – Vol. 165, no. 1. – P. 315–336.
10. Hu, B. Blow-up theories for semilinear parabolic equations / B. Hu // Lecture Notes in Mathematics. – 2011. – Vol. 2018. – 127 p.

R E F E R E N C E S

1. Chen B. A quasilinear parabolic system with nonlocal boundary condition / B. Chen, Y. Mi, C. Mu // Boundary Value Problems. – 2011. – Article ID 750769. – 18 p.
2. Deng K. Comparison principle for some nonlocal problems / K. Deng // Quarterly of Applied Mathematics. – 1992. – Vol. 50, no. 3. – P. 517–522.
3. Gladkov A.L. Blow-up of solutions for semilinear heat equation with nonlinear nonlocal boundary condition / A.L. Gladkov, K.I. Kim // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2008. – Vol. 338, no. 1. – P. 264–273.
4. Souplet P. Uniform blow-Up profiles and boundary behavior for diffusion equations with nonlocal nonlinear source / P. Souplet // Journal of Differential Equations. – 1999. – Vol. 153, no. 2. – P. 374–406.
5. Cortazar C. Uniqueness and non-uniqueness for the porous medium equation with nonlinear boundary condition / C. Cortazar, M. Elqueta, J.D. Rossi // Differential and Integral Equations. – 2003. – Vol. 16, no. 10. – P. 1215–1222.
6. Gladkov A.L. Uniqueness and nonuniqueness for reaction-diffusion equation with nonlocal boundary condition / A.L. Gladkov, K.I. Kim // Advances in Mathematical Sciences and Applications. – 2009. – Vol. 19. – P. 39–49.
7. Cortazar C. Uniqueness and non-uniqueness for a system of heat equations with nonlinear coupling at the boundary / C. Cortazar, M. Elqueta, J. D. Rossi // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. – 1999. – Vol. 37, no. 2. – P. 257–267.
8. Dickstein F. A maximum principle for semilinear parabolic systems and applications / F. Dickstein, M. Escobedo // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. – 2001. – Vol. 45, no. 7. –P. 825–837.
9. Escobedo, M. A semilinear parabolic system in a bounded domain / M. Escobedo, M.A. Herrero // Annali di Matematica Pura ed Applicata. – 1993. – Vol. 165, no. 1. – P. 315–336.
10. Hu B. Blow-up theories for semilinear parabolic equations / B. Hu // Blow-up theories for semilinear parabolic equations. – 2011. – Vol. 2018. –127 p.

Поступила в редакцию 22.06.2015

Адрес для корреспонденции: e-mail: ip.alexnikitin@gmail.com – Никитин А.И.

Репозиторий ВГУ