Матэматыка

УДК 517.91:517.977.1

Управляемость линейных стационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений при наличии комбинированного управления

О.В. Храмцов
Учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»

Одним из разделов теории оптимальных процессов является проблема полной управляемости линейных стационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений в различных классах управляющих воздействий. Полная управляемость означает возможность построения программного управляющего воздействия, переводящего состояние системы за конечный промежуток времени из любого наперед заданного начального состояния в любое наперед заданное конечное состояние.

Цель работы – найти условия наличия свойства полной управляемости линейных стационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений в новом классе комбинированных управляющих воздействий, состоящих из линейной комбинации функции управления, интеграла и производной от этой функции.

Материал и методы. *Объектом исследования является аналитическое представление управляемого процесса в виде линейных стационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В работе используются методы теории систем линейных стационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений; метод проблемы моментов; методы матричного анализа теории матриц.*

Результаты и их обсуждение. *В данной работе все множество линейных стационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений разбито на четыре класса. В каждом классе получен критерий полной управляемости при наличии комбинированного управления. Все результаты являются новыми, ибо получены для не изучаемого ранее случая комбинированного управления,*

Заключение. *В работе предложен алгоритм проверки наличия свойства полной управляемости линейных стационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений в новом классе комбинированных управляющих воздействий.*

Ключевые слова: *системы обыкновенных дифференциальных уравнений, автоматическое управление, полная управляемость.*

Controllability of Linear Stationary Differential Equation Systems with Composite Control

O.V. Khramtsov
Educational Establishment «Vitebsk State University named after P.M. Masherov»

One of the sections of the theory of optimal processes is the issue of total controlabilityl over linear stationary systems of ordinary differential equations in different classes of control impact. Total controlabilityl means possibility of building software control impact, which transfers the state of the system within a finite period of time from any initially programmed primary state into any initially programmed final state.

The purpose of the work is to find conditions of the presence of qualities of total controllability over linear stationary systems of ordinary differential equations in a new class of combined controllability impacts, which consist of a linear combination of the control function, integral and this function derivative.

Material and methods. *The object of the research is analytical picture of the control process in the form of a linear stationary system of ordinary differential equations. Methods of the theory of the systems of linear stationary systems of ordinary differential equations, the method of moment problem, methods of matrix analysis of the matrix theory are used in the work.*

Findings and their discussion. *In the work the multitude of linear stationary systems of ordinary differential equations is divided into four classes. For each class the criterion of total controllability with the presence of combined controllability is obtained. All the findings are new for they were obtained for the case of combined controllability which had not been studied previously.*

Conclusion. *An algorithm of the check of presence of the feature of total controllability of linear stationary systems of ordinary differential equations in the new class of combined controllability impacts is offered in the work.*

Key words: *linear stationary differential equation systems, automatic control, total controllability.*

В данной работе объектом исследования являются стационарные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которые линейны по состоянию и по управляющему воздействию. Изучается свойство полной управляемости таких систем, т.е. возможность построения управляющего воздействия, переводящего состояние системы за конечный промежуток времени из любого наперед заданного начального состояния в любое наперед заданное конечное состояние. Это свойство хорошо рассмотрено в математической литературе в случае управления, состоящего из вектор-функции (см., например, [1–4]). Управляемость в различных классах функций управления изучена в [5–6]. В настоящей работе свойство полной управляемости исследуется в предположении, что управляющее воздействие носит комбинированный характер: управляющее воздействие состоит из функции управления, интеграла и производной от этой функции.

Цель статьи – получение условий полной управляемости в случае комбинированного управления. Все множество изучаемых систем разбито на четыре класса, для каждого из которых доказан критерий наличия свойства полной управляемости. Эти критерии носят ранговый характер от некоторых матриц, составленных по известным матрицам исходной системы.

Материал и методы. Объектом исследования является аналитическое представление процесса в виде линейной стационарной систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В работе используются метод Эйлера построения фундаментальной матрицы решений однородных линейных стационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений; метод Коши построения общего решения неоднородных линейных стационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений; метод проблемы моментов; методы матричного анализа теории матриц.

Результаты и их обсуждение. В данной статье все множество изучаемых дифференциальных систем разбито на четыре класса. В каждом классе получен критерий полной управляемости при наличии комбинированного управления. Все результаты являются новыми, ибо получены для не изучаемого ранее случая комбинированного управления, состоящего из функции управления, интеграла и производной от этой функции.

I. Рассматривается процесс, описываемый линейной стационарной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Ax + bu + c\int_0^t u(s)ds + k\dot{u}\,, \qquad (1)$$

где $x \in \mathbf{R}^n$ – выход, состояние системы; $u \in \mathbf{R}^1$ – вход, управление, непрерывно дифференцируемая скалярная функция; A – постоянная вещественная $(n \times n)$-матрица, b, c, k – ненулевые вещественные постоянные n-векторы.

Для заданной скалярной функции u система (1) имеет единственное решение [7, с. 227] с начальным условием

$$x(0) = x^0\,. \qquad (2)$$

Рассмотрим свойство полной управляемости системы (1) в смысле следующего определения [1, с. 177].

Определение 1. *Система (1) называется вполне управляемой, если для произвольных конечных состояний $x^0, x^1 \in \mathbf{R}^n$ существуют конечный момент $t_1>0$ и непрерывно дифференцируемое управление $u = u(t, x^0, x^1)$, $t \in [0, t_1]$, такие, что для некоторого решения системы (1) наряду с условием (2) выполняется условие*

$$x(t_1) = x^1\,. \qquad (3)$$

1. Вначале рассматривается случай, когда векторы b, c и k попарно **не** коллинеарны.

Однородная система

$$\dot{y} = Ay \qquad (4)$$

имеет общее решение [1, с. 157, 171]

$$y = \exp(At)y^0 = \sum_0^{m-1} \alpha_i(t)A^i y^0\,, \qquad (5)$$

где m – степень минимального полинома матрицы A, $\alpha_i(t)$ – коэффициенты интерполяционного полинома Лагранжа–Сильвестра, построенного для функции $\exp(At)$ [1, с. 178].

Имеет место

Теорема 1. *В случае, когда векторы b, c и k не коллинеарны, система (1) вполне управляема тогда и только тогда, когда существует конеч-*

ное значение аргумента $t_1 > 0$*, при котором выполнено ранговое условие*

$$rankQ\ (-t_1) = n, \tag{6}$$

где

$$Q(t) \equiv [r, Ar, ..., A^{m-1}r, -k, \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i(t) A^i k, \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i(t) A^i d],$$

$r = c - Ab + A^2 k,\ d = b - Ak;\ m \in \{n, n-1, n-2\}.$

Доказательство. 1. Согласно теореме Кэли–Гамильтона [1, с. 179] справедливо разложение

$$A^m = -l_0 E - l_1 A - \ldots - l_{m-1} A^{m-1}. \tag{7}$$

Здесь l_i – коэффициенты в минимальном полиноме матрицы A.

После подстановки (5) в (4) и элементарных преобразований получим

$$[E(\dot\alpha_0 + l_0\alpha_{m-1}) + A(\dot\alpha_1 - \alpha_0 + l_1\alpha_{m-1}) + \\ + A^2(\dot\alpha_2 - \alpha_1 + l_2\alpha_{m-1}) + \ldots + \\ + A^{m-1}(\dot\alpha_{m-1} - \alpha_{m-2} + l_{m-1}\alpha_{m-1})]y^0 \equiv 0. \tag{8}$$

Существует вектор y^0, что ранг матрицы коэффициентов в (8) удовлетворяет условию

$$rank[\,Ey^0, Ay^0, \ldots, A^{m-1}y^0\,] = m.$$

Поэтому тождество (8) имеет место тогда и только тогда, когда вектор $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_{m-1})^T$ (символ $(\ldots)^T$ означает транспонирование) удовлетворяет системе

$$\dot\alpha = L\alpha, \quad L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -l_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -l_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & -l_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -l_{m-1} \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\dot\alpha(-t) = -L\alpha(-t). \tag{9}$$

(Здесь l_i – коэффициенты в минимальном полиноме матрицы A из (7)).

2. Общее решение для системы (1) записывается в виде [1, с. 178]

$$x(t) = \exp(At)[x^0 + \\ + \int_0^t \exp(-At)(bu(t) + cw(t) + k\dot u)dt], \tag{10}$$

где $w = \int_0^t u(s)ds$.

Если воспользоваться формулой (5), то в момент $t = t_1$ из равенства (10) получим равенство

$$h = Q_1 \int_0^{t_1} \alpha(-t)u(t)dt + Q_2 \int_0^{t_1} \alpha(-t) \int_0^t u(s)dsdt + \\ + Q_3 \int_0^{t_1} \alpha(-t)\dot u(t)dt, \tag{11}$$

где $Q_1 = [\,b, Ab, \ldots, A^{m-1}b\,]$, $Q_2 = [\,c, Ac, \ldots, A^{m-1}c\,]$, $Q_3 = [\,k, Ak, \ldots, A^{m-1}k\,]$, $h = \exp(-At_1)x^1 - x^0$.

Вычислим с учетом (9) следующие интегралы по частям:

$$\int_0^{t_1} \alpha(-t)u(t)dt = \alpha(-t_1)\int_0^{t_1} u(t)dt - \int_0^{t_1} \dot\alpha_{m-1}(-t)\int_0^t u(s)dsdt = \\ = \alpha(-t_1)\int_0^{t_1} u(t)dt - L\int_0^{t_1} \alpha(-t)\int_0^t u(s)dsdt. \tag{12}$$

Аналогично вычислим дважды с учетом (9) следующие интегралы по частям:

$$\int_0^{t_1} \alpha(-t)\dot u(t)dt = (\alpha(-t\ )u(t))\Big|_0^{t_1} - \\ - L\alpha(-t_1)\int_0^{t_1} u(t)dt + L^2 \int_0^{t_1} \alpha(-t)\int_0^t u(s)dsdt. \tag{13}$$

Так как

$$L^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -l_0 & 0 + l_0 l_{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -l_1 & -l_0 + l_1 l_{m-1} \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -l_2 & -l_1 + l_2 l_{m-1} \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & -l_3 & -l_2 + l_3 l_{m-1} \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & -l_4 & -l_3 + l_4 l_{m-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -l_{m-1} & -l_{m-2} + l_{m-1} l_{m-1} \end{bmatrix},$$

то после подстановки (12) и (13) в (11) и последующих вычислений с учетом (7) получим

$$h = (Q_2 - Q_1 L + Q_3 L^2)\int_0^{t_1} \alpha(-t)w(t)dt + \\ + Q_3(\alpha(-t_1)u(t_1) - \alpha(0)u(0)) + \\ + [Q_1 - Q_3 L]\alpha(-t_1)\int_0^{t_1} u(t)dt = \{[c, Ab, \ldots, A^{m-1}] - \\ - [Ab, A^2 b, \ldots, A^m b] + \\ + [A^2 k, A^3 k, \ldots, A^{m-1}k, A^m k, A^{m+1}k]\} \times \\ \times \int_0^{t_1} \alpha(-t)w(t)dt + \sum_0^{m-1} \alpha_i(-t_1)A^i k u(t_1) - ku(0) +$$

$$+([b, Ab, \dots, A^{m-1}b] - [Ak, A^2k, \dots, A^m k])ç$$

$$ç\, \alpha(-t_1)\int_0^{t_1} u(t)dt .$$

Или

$$h = [r, Ar, ..., A^{m-1}r, -k, \sum_{i=0}^{m-1}\alpha_i(-t_1)A^i k, \sum_{i=0}^{m-1}\alpha_i(-t_1)A^i d]p ,$$

$r = c - Ab + A^2k$, $d = b - Ak$, $m \in \{n, n-1, n-2\}$.

Таким образом, для полной управляемости системы (1) необходима разрешимость алгебраической системы относительно вектора p

$$h = Q(t)p ,\ p = (p_0, p_1, \dots, p_{m-1}, p_m, p_{m+1}, p_{m+2})^T , \quad (14)$$

при этом

$$p_m = u(0) , \quad (15)$$

$$p_{m+1} = u(t_1) , \quad (16)$$

$$p_{m+2} = w(t_1) , \quad (17)$$

$$\begin{cases} p_0 = \int_0^{t_1} \alpha_0(-t)w(t)dt, \\ p_1 = \int_0^{t_1} \alpha_1(-t)w(t)dt, \\ \dots \\ p_{m-1} = \int_0^{t_1} \alpha_{m-1}(-t)w(t)dt, \end{cases} \quad (18)$$

здесь

$$w(t) = \int_0^t u(s)ds , \quad (19)$$

и матрица $Q(t)$ определена в (6). Для разрешимости задачи полной управляемости необходимо и достаточно, чтобы были разрешимы система (14) и расширенная проблема моментов (15)–(18). Первое требование выполняется согласно условию (6) теоремы 1. Покажем выполнимость второго требования.

3. Решение расширенной проблемы моментов будем искать в классе непрерывных функций

$$u = C_0 + 2C_1t + 3C_2t^2 + f(t) ,\ C_i \in \mathbf{R}^1 , \quad (20)$$

с подлежащими определению параметрами C_0, C_1, C_2 и непрерывной функцией f. Тогда из определения (19) имеем

$$w(t) = C_0t + C_1t^2 + C_2t^3 + \int_0^t f(t)dt ,\ w(0) = 0 . \quad (21)$$

В силу линейной независимости функций $\alpha_i(t), i = 0, \dots, m-1$, проблема моментов (18) имеет [8, с. 66] решение $w(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, в том числе и в классе непрерывно дифференцируемых функций с условием $w(0) = 0$.

Тогда условия (15)–(17) принимают вид

$$\begin{cases} p_m = C_0 + f(0), \\ p_{m+1} = C_0 + 2C_1t_1 + 3C_2t_1^2 + f(t_1), \\ p_{m+2} = C_0t_1 + C_1t_1^2 + C_2t_1^3 + \int_0^{t_1} f(t)dt. \end{cases} \quad (22)$$

Линейная алгебраическая система (22) имеет единственное решение C_0, C_1, C_2. Так как функция $w(t)$ известна, то, взяв производную от тождества (21), найдем функцию $f(t)$. Тем самым управление (20), решающее задачу полной управляемости, найдено. Теорема 1 доказана.

II. Критерий полной управляемости (6) довольно громоздкий. В этом пункте доказывается более простой критерий. Справедлива

Теорема 2. *В случае, когда векторы* b, c *и* k *не коллинеарны, система (1) вполне управляема тогда и только тогда, когда выполнено ранговое условие*

$$rankQ = n, \quad (23)$$

где $Q = [r, Ar, ..., A^{m-1}r, k, d]$, $r = c - Ab + A^2k$, $d = k - Ab$.

Доказательство. Согласно теореме 1 требуется доказать, что утверждение (22) теоремы 2 обеспечивает выполнимость условия

$$rankQ(-t_1) = n, \quad (24)$$

где $Q(t) \equiv [r, Ar, ..., A^{m-1}r, -k, \sum_{i=0}^{m-1}\alpha_i(t)A^i k, \sum_{i=0}^{m-1}\alpha_i(t)A^i d]$,

$r = c - Ab + A^2k$, $d = k - Ab$, $m \in \{n, n-1, n-2\}$.

Рассмотрим алгоритм последовательного отыскания матрицы наибольшего ранга n из списка S матриц

$$\begin{aligned} &R_n = [r, Ar, \dots, A^{n-1}r], \\ &R_{n-1,0,0} = [r, Ar, \dots, A^{\mu-1}r, k], \quad \mu \in \{n-1, n\}, \\ &R_{n-1,i,0} = [r, Ar, \dots, A^{\mu-1}r, A^i k], \quad \mu \in \{n-1, n\}, \\ &i = \overline{1, m-1} , \\ &R_{n-1,0,0*} = [r, Ar, \dots, A^{\mu-1}r, d], \quad \mu \in \{n-1, n\}, \\ &R_{n-1,0,i} = [r, Ar, \dots, A^{\mu-2}r, A^i d],\ \mu \in \{n-1, n\}, \\ &i = \overline{1, m-1} , \\ &R_{n-2,0} = [r, Ar, \dots, A^{\mu-1}r, k, d],\ \mu \in \{n-2, n-1, n\}. \end{aligned} \quad \text{(S)}$$

Шаг 1. Пусть $m = n$. Для матрицы $R_n = [r, Ar, \dots, A^{n-1}r]$ имеет место одна из двух возможностей

$$rankR_n = n\ \text{(А)} \ \text{или} \ rankR_n < n. \quad \text{(Б)}.$$

В случае (А) условие (24) выполняется и алгоритм заканчивается. В случае (Б) переходим к следующему шагу.

Шаг 2. Пусть $rankR_n = n-1$. Для каждой матрицы $R_{n-1,0,0} = [r, Ar, \ldots, A^{\mu-1}r, k]$, $\mu \in \{n-1, n\}$, имеет место одна из двух возможностей

$$rankR_{n-1,0,0} = n, \ \text{(А1)} \ \text{или} \ rankR_{n-1,0,0} < n. \quad \text{(Б1)}$$

В случае (А1) условие (24) выполняется и алгоритм заканчивается. В случае (Б1) переходим к следующему шагу.

Шаг 3. Ввиду предположения (Б1) для каждой матрицы $R_{n-1,i,0} = [r, Ar, \ldots, A^{\mu-1}r, A^i k]$, $\mu \in \{n-1, n\}$, $i = \overline{1, m-1}$, имеет место условие

$$rankR_{n-1,i,0} < n, \ \text{т.е.} \ \det R_{n-1,i,0} = 0. \quad \text{(Б2)}$$

Действительно. В силу (Б1) существует вектор $q \in \mathbf{R}^{\mu-1}$ такой, что $k = Rq$, где $R = [r, Ar, \ldots, A^{\mu-1}r]$. Тогда матрица $R_{n-1,i,0} = [R, A^i Rq]$ ввиду теоремы Кэли–Гамильтона (7) обладает свойством (Б2).

Шаг 4. Если $rankR_n = n-1$, то для каждой матрицы $R_{n-1,0,0*} = [r, Ar, \ldots, A^{\mu-1}r, d]$, $\mu \in \{n-1, n\}$, имеет место одна из двух возможностей

$$rankR_{n-1,0,0+} = n, \ \text{(А3)} \ \text{или} \ rankR_{n-1,0,0+} < n. \quad \text{(Б3)}$$

В случае (А3) условие (24) выполняется и алгоритм заканчивается. В случае (Б3) переходим к следующему шагу.

Шаг 5. В силу предположения (Б3) аналогично шагу 3 можно показать, что для каждой матрицы $R_{n-1,0,i} = [r, Ar, \ldots, A^{\mu-1}r, A^i d]$, $\mu \in \{n-1, n\}$, $i = \overline{1, m-1}$,

имеет место условие

$$rankR_{n-1,i,0} < n, \ \text{т.е.} \ \det R_{n-1,i,0} = 0. \quad \text{(Б4)}$$

Пусть теперь $rankR_n = n-2$. Введем в рассмотрение матрицу

$$R^*_{n-2,0} = [r, Ar, \ldots, A^{n-3}r, k, d] = [R, k, d].$$

Отметим тот факт, что для любого $\mu \in \{n-2, n-1, n\}$, $\mu \ge m$, имеет место равенство

$$rank[R, k, d] = rankR_{n-2,0},$$

где $R = [r, Ar, \ldots, A^{n-3}r]$, $R_{n-2,0} = [r, Ar, \ldots, A^{\mu-1}r, k, d]$, $\mu \in \{n-2, n-1, n\}$.

Поэтому достаточно при изучении ранга матрицы $R_{n-2,0}$ выяснить ранг матрицы $[R, k, d]$. Для изучения ранга остальных матриц из списка (S) понадобятся вспомогательные факты. Положим в задаче (14) $p_i = 0$, $n-3 < i < m-1$. Тогда определитель квадратной матрицы $Q(t)$ имеет представление

$$\det Q(t) = F_0(t) + F_1(t) + \ldots + F_{n-3}(t),$$

где $\quad F_0(t) = \alpha_0 \alpha_0 \left| R, k, d \right|,$

$$F_1(t) = \alpha_0 \alpha_1 \left(\left| R, k, Ad \right| + \left| R, Ak, d \right| \right),$$

$$F_2(t) = \alpha_0 \alpha_2 \left(\left| R, k, A^2 d \right| + \left| R, A^2 k, d \right| \right) + \alpha_1 \alpha_1 \left| R, Ak, Ad \right|,$$

$$F_3(t) = \alpha_0 \alpha_3 \left(\left| R, k, A^3 d \right| + \left| R, A^3 k, d \right| \right) + \\ + \alpha_1 \alpha_2 \left(\left| R, Ak, A^2 d \right| + \left| R, A^2 k, Ad \right| \right),$$

$$F_4(t) = \alpha_0 \alpha_4 \left(\left| R, k, A^4 d \right| + \left| R, A^4 k, d \right| \right) + \\ + \alpha_1 \alpha_3 \left(\left| R, Ak, A^3 d \right| + \left| R, A^3 k, Ad \right| \right) + \\ + \alpha_2 \alpha_2 \left| R, A^2 k, A^2 d \right|,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$F_{n-3}(t) = \alpha_0 \alpha_{n-3} \left(\left| R, k, A^{n-3} d \right| + \left| R, A^{n-3} k, d \right| \right) + \\ + \alpha_1 \alpha_{n-2} \left(\left| R, Ak, A^{n-4} d \right| + \left| R, A^{n-4} k, Ad \right| \right) + \ldots + P(t),$$

здесь $P(t) \equiv \alpha_{\frac{n-4}{2}} \alpha_{\frac{n-4}{2}+1} \left(\left| R, A^{\frac{n-4}{2}} k, A^{\frac{n-4}{2}+1} d \right| + \left| R, A^{\frac{n-4}{2}+1} k, A^{\frac{n-4}{2}} d \right| \right)$, если n – четное,

$P(t) \equiv \alpha_{\frac{n-3}{2}} \alpha_{\frac{n-3}{2}} \left| R, A^{\frac{n-3}{2}} k, A^{\frac{n-3}{2}} d \right|$, если n – нечетное.

Скалярные функции $\alpha_i(t)$ имеют представление [1, с. 157; 9, с. 58]

$$\alpha_i(t) = \frac{t^i}{i!} + \sum_1^{\infty} a_{is} t^{n-1+s}, \quad a_{is} \in \mathbf{R}^1, \\ i \in \{0, \ldots, n-3\}.$$

Поэтому для функции $F_i(t)$, $i \in \{0, \ldots, n-3\}$, имеет место одна из трех возможностей: а) эта функция начинается со степени t^i, б) функция начинается со степени t^p, причем $p \ge n$, в) функция тождественно равна нулю. Тогда определитель $\Delta = \det Q(t)$ обладает важным свойством:

Утверждение 1. *Определитель* Δ *не равен тождественно нулю тогда и только тогда, когда встретится функция* $F_i(t)$, $i \in \{0,\ldots,n-3\}$, *не равная тождественно нулю.*

Шаг 6. Для матрицы $R^*_{n-2,0} = [R,k,d]$ имеет место одна из двух возможностей

$$rank R^*_{n-2,0} = n \text{ , (т.е. } |R,k,d| \neq 0). \qquad (А5)$$

или

$$rank R^*_{n-2,0} < n \text{, (т.е. } |R,k,d| = 0). \qquad (Б5)$$

В случае (А5) в силу утверждения 1 условие (24) выполняется и алгоритм заканчивается. В случае (Б5) переходим к следующему шагу.

Шаг 7. Функции $F_i(t)$ содержат два вида определителей

$$\Delta_s = \left|R, A^s k, A^s d\right|,$$

$$\Delta_{sk} = \left|R, A^s k, A^{s+k} d\right| + \left|R, A^{s+k} k, A^s d\right|.$$

В случае (Б5) эти определители равны нулю. Действительно, в силу условия (Б) существует вектор $p \in \mathbf{R}^{n-2}$ и число p_0 такие, что $k = Rp + p_0 d$. Тогда $A^s k = A^s Rp + A^s p_0 d$, $A^{s+k} k = A^{s+k} Rp + A^{s+k} p_0 d$. Поэтому

$$\Delta_s = \left|R, A^s Rp + p_0 A^s d, A^s d\right| = 0,$$

$$\Delta_{sk} = \left|R, A^s Rp + p_0 A^s d, A^{s+k} d\right| +$$

$$+ \left|R, A^{s+k} Rp + p_0 A^{s+k} d, A^s d\right| =$$

$$= \left|R, A^s Rp, A^{s+k} d\right| + \left|R, p_0 A^s d, A^{s+k} d\right| +$$

$$+ \left|R, A^{s+k} Rp, A^s d\right| + \left|R, p_0 A^{s+k} d, A^s d\right| = 0.$$

Ввиду теоремы Кэли–Гамильтона в последней строке первый и третий определители равны нулю, а второй и четвертый отличаются знаком. Таким образом, в рассматриваемом случае отличие от тождественного нуля определителя $\det Q(t)$ зависит только от ранга матрицы $R^*_{n-2,0} = [R,k,d]$. Из всего доказательства следует, что отличие от тождественного нуля определителя $\det Q(t)$ обуславливается выполнением хотя бы одного равенства

$$rank R_n = n, \quad R_n = [r, Ar, \ldots, A^{n-1} r],$$

$$rank R_{n-1,0,0} = n, \quad R_{n-1,0,0} = [r, Ar, \ldots, A^{n-2} r, k],$$

$$rank R_{n-1,0,0*} = n, \quad R_{n-1,0,0*} = [r, Ar, \ldots, A^{n-2} r, d],$$

$$rank R^*_{n-2,0} = n, \quad R_{n-2,0} = [r, Ar, \ldots, A^{n-3} r, k, d].$$

Все эти условия можно заменить одним условием (23). Теорема 2 доказана.

III. Теперь рассматривается случай, когда ненулевые векторы b, c и k коллинеарны: существуют вещественные числа β_1, β_2 такие, что $b = \beta_1 k$, $c = \beta_2 k$.

Имеет место

Теорема 3. *В случае, когда ненулевые векторы* b, c *и* k *коллинеарны, система (1) вполне управляема тогда и только тогда, когда для матрицы*

$$Q \equiv [k, Ak, \ldots, A^{n-1} k]$$

выполняется условие

$$rank Q = n. \qquad (25)$$

Доказательство. В рассматриваемом случае коллинеарности векторов b, c и k система (1) принимает вид

$$\dot{x} = Ax + k(\beta_1 u + \beta_2 \int_0^t u(s)ds) + \dot{u}) . \qquad (26)$$

Сформируем новое управление

$$v = \beta_1 u + \beta_2 \int_0^t u(s)ds) + \dot{u} . \qquad (27)$$

Тогда система (26) примет простой вид

$$\dot{x} = Ax + kv,$$

для которой критерий управляемости известен [1 с. 183] и заключается в выполнении условия (25). Таким образом, искомое управление $v(t)$, $t \in [0, t_1]$, существует, в том числе и непрерывно дифференцируемое [5]. Из уравнения (27) всегда можно восстановить управление u, так как это уравнение эквивалентно задаче Коши

$$\ddot{u} + \beta_1 \dot{u} + \beta_2 u = \dot{v}(t), \quad u(0) + \dot{u}(0) = v(0) .$$

Эта задача Коши всегда имеет решение в области определения гладкой функции $v(t)$, $t \in [0, t_1]$. Теорема 3 доказана.

IV. Рассмотрим теперь случай векторного управления. Пусть процесс описывается линейной стационарной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Ax + Bu + C\int_0^t u(s)ds + K\dot{u} , \qquad (28)$$

где $x \in \mathbf{R}^n$ – выход, состояние системы; $u \in \mathbf{R}^r$ – вход, управление, непрерывно дифференцируемая вектор-функция; A – постоянная вещественная $(n \times n)$-матрица; B, C, K – вещественные постоянные $(n \times r)$-матрицы.

Множество Ω всех систем (27) разобьем в зависимости от свойств матрицы управления

$[B,C,K]$ на два класса Ω_1 и Ω_2, для каждого из которых рассматривается затем задача управления. Обозначим

$$rank[B,C,K]=\rho,\quad \rho\in\{1,\ldots,2m\},\quad 2m\le n.$$

К классу Ω_1 относятся те системы (27), для которых выполняются одновременно два свойства

$$\rho=r_0\le r,\qquad (29.1)$$

$$\exists\alpha,\beta\in\mathbf{R}^1:\quad rank[B+\alpha C+\beta K]=r_0,\qquad (29.2)$$

где r_0 – размерность вектора управления u. К классу Ω_2 относятся те системы (2), для которых **не** выполняется хотя бы одно из свойств (28): $\Omega_2=\Omega|\Omega_1$.

Для систем класса Ω_2 имеют место

Теорема 4. *Система (28) класса* Ω_2 *вполне управляема тогда и только тогда, когда существует конечное значение аргумента* $t_1>0$*, при котором выполнено ранговое условие*

$$rankQ\ (-t_1)=n,$$

где

$$Q(t)\equiv[R,AR,...,A^{m-1}R,K,\sum_{i=0}^{m-1}\alpha_i(t)A^iK,\sum_{i=0}^{m-1}\alpha_i(t)A^iD],$$

$$R=C-AB+A^2K,\ D=K-AB,\ m\in\{n,n-1,n-2\}.$$

Теорема 5. *Система (25) класса* Ω_2 *вполне управляема тогда и только тогда, когда для матрицы*

$$Q\ \equiv[R,AR,...,A^{m-1}R,K,D],$$

где $R=C-AB+A^2K,\quad D=K-AB,$ *выполняется условие*

$$rankQ=n.$$

Доказательство теорем 4 и 5 производится аналогично доказательствам теорем 1 и 2 с использованием принципа суперпозиции [3, с. 43].

V. Рассмотрим теперь системы (28) класса Ω_1. При выполнении условий (29) существует матрица P, составленная из ровно r_0 линейно независимых вектор-столбцов матриц B,C,K, такая, что $rankP=r_0$. Отберем в матрицу P максимальное число p линейно независимых столбцов из матрицы K, добавим в нее максимальное число q линейно независимых с ними столбцы из матрицы B, а затем добавим остальные g линейно независимых с ними столбцы из матрицы C

$$P=[k^{i_1},\ldots,k^{i_p},b^{i_{p+1}},\ldots,b^{i_{p+q}},c^{i_{p+q+1}},\ldots,c^{i_{p+q+g}}],$$

$$p+q+g=r_0,\qquad (30)$$

(индекс вверху означает номер столбца). При этом в силу свойства (25.2) номера столбцов в матрице P не совпадают: $i_\mu\ne i_\nu$, $\mu\ne\nu$. Тогда существуют однозначно определяемые вещественные $(r_0\times r)$-матрицы M,N,H такие, что имеют место представления

$$K=PM,\quad B=PN,\quad C=PH.\qquad (31)$$

Система (28) класса Ω_1 в силу (31) имеет вид

$$\dot{x}=Ax+P(M\dot{u}+Nu+H\int_0^t u(s)ds),\qquad (32)$$

имеет место

Теорема 6. *Система (32) класса* Ω_1 *вполне управляема тогда и только тогда, когда для матрицы*

$$Q\equiv[P,AP,...,A^{n-1}P]$$

выполняется условие

$$rankQ=n.\qquad (33)$$

Доказательство. В рассматриваемом случае класса Ω_1 система (25) имеет вид (29). Сформируем новое управление

$$v=M\dot{u}+Nu+H\int_0^t u(s)ds.\qquad (34)$$

Тогда система (31) примет простой вид

$$\dot{x}=Ax+Pv,$$

для которой критерий управляемости известен [1, с. 182] и заключается в выполнении условия (33), При этом управление существует в том числе и в классе дважды непрерывно дифференцируемых функций [5]. Покажем, что из системы (34) всегда можно восстановить управление u. В силу свойства (29.2) номера столбцов в матрице P не совпадают: $i_\mu\ne j_\nu$ $\forall\mu\in\{1,\ldots,p\},\forall\nu\in\{1,\ldots,q\}$. Введем в рассмотрение $(r\times r)$-матрицу перестановок $T=\|e(i,j)\|_{11}^{rr}$, у которой в каждой строке и в каждом столбце стоит только одна единица, при этом элементы $e(j,i_j)=1$, $j=\overline{1,r}$, а остальные элементы $e(s,i_j)=0$, $s\ne j$. Введем новое управление

$$w=Tu,\quad \det T\ne 0,\qquad (35)$$

и представим его в виде

$$w=(w_1,w_2,w_3,w_4),\quad w_1\in\mathbf{R}^p,\ w_2\in\ \mathbf{R}^q,$$

$$w_3\in\ \mathbf{R}^g,\ w_4\in\ \mathbf{R}^s,$$

$$p+q+g=r_0,\quad p+q+g+s=r.$$

Тогда матрицы в (29) имеют следующее строение:

$$M=\begin{bmatrix} E_p & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$N=\begin{bmatrix} N_{11} & 0 & N_{13} & N_{14} \\ 0 & E_q & N_{23} & N_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$H=\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & 0 & H_{14} \\ H_{21} & H_{22} & 0 & H_{24} \\ 0 & 0 & E_s & H_{34} \end{bmatrix}.$$

Здесь E_l – единичные $(l\times l)$-матрицы, остальные блоки – однозначно определенные матрицы соответствующих размерностей векторам $w_i,\ i=1,2,3,4$.

Без ограничения возможности управления положим

$$w_4(t)\equiv 0.$$

Тогда система (34) принимает вид

$$\dot w_1+M_{12}\dot w_2+M_{13}\dot w_3+N_{11}w_1+N_{13}w_3+$$
$$+H_{11}\int_0^t w_1(t)dt+H_{12}\int_0^t w_2(t)dt=v_1(t),\quad (36)$$

$$w_2+N_{23}w_3+H_{21}\int_0^t w_1(t)dt+H_{22}\int_0^t w_2(t)dt=v_2(t),\quad (37)$$

$$\int_0^t w_3(t)dt=v_3(t),\quad (38)$$

а в качестве управления $v=(v_1{}^T,v_2{}^T,v_3{}^T)^T$, решающего задачу управления, используем функции с условием $v(0)=0$, например, векторные полиномы [5] $v=C_1t+C_2t^2+C_3t^3+\ldots+C_rt^m$, $C_i\in R^{r_0}$. Из системы (46) имеем

$$w_3(t)=\dot v_3(t),\quad w_3^0=w_3(0)=\dot v_3(0).\quad (39)$$

Подставим $t=0$ в равенства (36) и (37), с учетом (39) получим

$$\dot w_1(0)+M_{12}\dot w_2(0)+$$
$$+M_{13}\dot w_3(0)+N_{11}w_1(0)+N_{13}w_3(0)=v_1(0),\quad (40)$$
$$w_2(0)=v_2(0)-N_{23}\dot v_3(0).\quad (41)$$

Возьмем производную от равенства (37)

$$\dot w_2(t)+H_{21}w_1(t)+H_{22}w_2(t)=h_2(t),$$
$$h_2(t)\equiv \dot v_2(t)-N_{23}\dot v_3(t).\quad (42)$$

При $t=0$ имеем

$$\dot w_2(0)+H_{21}w_1(0)+H_{22}w_2(0)=h_2(0),\quad (43)$$

Возьмем производную от равенств (36) и (42)

$$\ddot w_1+M_{12}\ddot w_2+N_{11}\dot w_1+H_{11}w_1+H_{12}w_2=h_1(t),$$
$$h_1(t)\equiv \dot v_1(t)-M_{13}\ddot v_3(t)-N_{13}\dot v_3(t),\quad (44)$$
$$\ddot w_2+H_{21}\dot w_1+H_{22}\dot w_2=\dot h_2(t).\quad (45)$$

В системе (44)–(45) сделаем замену

$$w_1=z_1,\quad w_2=z_2.\quad (46)$$

В результате получится линейная неоднородная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot z_1=z_3, \\ \dot z_2=z_4, \\ \dot z_3+M_{12}\dot z_4=H_{11}z_1+H_{12}z_2-N_{11}z_3+h_1(t), \\ \dot z_4=-H_{21}z_3-H_{22}z_4-N_{11}z_4+h_2(t). \end{cases}\quad (47)$$

Положим произвольным образом $w_1(0)=z_1^0$. Остальные начальные векторы $z_i^0,\ i=2,3,4$, определяются из равенств (40), (41, (43). Задача Коши для системы (47) всегда разрешима. Тем самым согласно (39), (46) найден вектор w, а значит, в силу (35) и вектор управления u, решающий задачу управления. Теорема 6 доказана.

Заключение. В данной статье получены условия полной управляемости для стационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, которые линейны по состоянию и управляющему воздействию. Управляемость изучена при наличии нового комбинированного управляющего воздействия в виде функции управления, интеграла и производной от этой функции управления. Все множество исследуемых дифференциальных систем разбито на четыре класса, в каждом из которых доказан критерий наличия свойства полной управляемости. Для каждого класса критерий носит ранговый характер от некоторой матрицы, построенной по известным матрицам исследуемых систем. Результаты работы являются новыми и носят фундаментальный характер.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ройтенберг, Я.Н. Автоматическое управление / Я.Н. Ройтенберг. – М.: Наука, 1971. – 395 с.
2. Калман, Р. Очерки по математической теории систем / Р. Калман, П. Фалб, М. Арбиб. – М.: Наука, 1971. – 626 с.
3. Габасов, Р. Качественная теория оптимальных процессов / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова. – М.: Наука, 1971. – 508 с.

4. Ли, Э. Основы теории оптимального управления / Э. Ли, Л. Маркус. – М.: Наука, 1972. – 534 с.
5. Шкляр, Б.Ш. Об управляемости в классах простейших функций / Б.Ш. Шкляр // Вестн. БГУ. – Сер. 1. – 1972. – № 1. – С. 91–93.
6. Астровский, А.И. Наблюдаемость нестационарных линейных систем / А.И. Астровский. – Минск: Изд-во ИМ АНБ. Препринт № 8(40). – 1978. – 24 с.
7. Матвеев, Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений / Н.М. Матвеев. – М.: Наука, 1971. – 426 с.
8. Габасов, Р. Качественная теория оптимальных процессов / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова. – М.: Наука, 1971. – 508 с.
9. Демидович, Б.П. Лекции по математической теории устойчивости / Б.П. Демидович. – М.: Наука, 1967. – 472 с.

R E F E R E N C E S

1. Reutenberg Ya.N. *Avtomaticheskoye upravleniye* [Automatic Controllability], Moscow, Nauka, 1971, 395 p.
2. Kalman R. Falb M., Arbib M. *Ocherki po matematicheskoi teorii sistem* [Essays on Mathematical Theory of Systems], Moscow, Nauka, 1971, 626 p.
3. Gabasov R., Kirillova F.M. *Kachestvennaya teoriya optimalnikh protsessov* [Quality Theory of Optimal Processes], Moscow, Nauka, 1971, 508 p.
4. Lee E., Markus L. *Osnovi teorii optimalnogo upravleniya* [Bases of the Theory of Optimal Controllability], Moscow, Nauka, 1972, 534 p.
5. Shkliar B.Sh. *Vestnik BGU. Ser. 1.* [Newsletter of BSU. Series 1], 1972, 1, pp. 91–93.
6. Astrovski A.I. *Nabliudayemost nestatsionarnikh lineinikh system* [Observation of Non Stationary Linear Systems], Minsk, izdatelstvo IM ANB. Preprint, 8(40), 1978, 24 p.
7. Matveyev N.M. *Metodi integrirovaniya obyknovennikh differentsialnikh uravnenii* [Methods of Integration of Ordinary Differential Equations], Moscow, Nauka, 1971, 426 p.
8. Gabasov R., Kirillova F.M. *Kachestvennaya teoriya optimalnikh protsessov* [Quality Theory of Optimal Processes], Moscow, Nauka, 1971, 508 p.
9. Demydovich B.P. *Lektsii po matematicheskoi teorii ustoichivosti* [Lectures on Mathematical Theory of Stability], Moscow, Nauka, 1967, 472 p.

Поступила в редакцию 02.06.2015
Адрес для корреспонденции: e-mail: kgima@vsu.by – Храмцов О.В.