

Последовательности параллелограммов и самосовмещение элементов n -арных групп

Д.И. Кирилюк

Учреждение образования «Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Представляемая статья относится к области исследования n -арных групп геометрическими методами и развитию приложений теории n -арных групп в аффинной геометрии.

Цель работы – установить свойства последовательностей параллелограммов n -арных групп и новые условия самосовмещения точек n -арных групп относительно вершин многоугольников с четным количеством вершин.

Материал и методы. Объектом исследования являются последовательности параллелограммов n -арных групп, многоугольники n -арных групп с четным количеством вершин. В работе используются общие и геометрические методы теории n -арных групп.

Результаты и их обсуждение. Теорема 1. Пусть G – n -арная группа, $\langle a_1, a_2, a_3, a_4 \rangle, \langle b_1, b_2, b_3, b_4 \rangle$ – параллелограммы G , где $b_1 = a_2$, $b_2 = S_{a_2}(a_1)$, $b_4 = S_{a_3}(a_4)$. Тогда если $\langle a_4, a_3, a_5, a_6 \rangle, \langle a_6, a_5, a_7, a_8 \rangle, \dots, \langle a_{k-2}, a_{k-3}, a_{k-1}, a_k \rangle, \langle b_4, b_3, b_5, b_6 \rangle, \dots, \langle b_{l-2}, b_{l-3}, b_{l-1}, b_l \rangle$ – параллелограммы G ($k \geq 1, l \geq 1$ – четные натуральные числа), то $\langle b_l, b_{l-1}, a_{k-1}, a_k \rangle$ – параллелограмм G .

Теорема 2. Пусть G – полуабелева n -арная $2s$ -группа, $a, b, x_1, x_2, \dots, x_k$ – произвольные точки из G . Тогда
1) $\langle a, b, S_{x_i}(S_{x_{i-1}}(\dots(S_{x_1}(a))\dots)), S_{x_i}(S_{x_{i-1}}(\dots(S_{x_1}(b))\dots)) \rangle$ – параллелограмм G , если i – нечетное натуральное число;
2) $\langle a, b, S_{x_i}(S_{x_{i-1}}(\dots(S_{x_1}(b))\dots)), S_{x_i}(S_{x_{i-1}}(\dots(S_{x_1}(a))\dots)) \rangle$ – параллелограмм G , если i – четное натуральное число.

Заключение. Получены новые связи между последовательностями параллелограммов n -арных групп, установлены новые свойства самосовмещения точек относительно вершин многоугольников с четным количеством вершин.

Ключевые слова: многоугольники n -арных групп, полуабелевость, самосовмещение элементов n -арных групп.

Sequences of Parallelograms and Self-Returning of Elements of n -ary Groups

D.I. Kirilyuk

Educational Establishment «Belarusian State University
of Informatics and Radioelectronics»

The represented article belongs to area of the research n -ary of groups by geometrical methods and to development of applications of the theory of n -ary groups in affine geometry.

The purpose of the work is to investigate properties of sequences of parallelograms of n -ary groups, to establish new conditions of self-returning of points of n -ary groups concerning tops of polygons with even quantity of tops.

Material and methods. Object of the research are sequences of parallelograms of n -ary groups, polygons of n -ary groups with even quantity of tops. In the work the general and geometrical methods of the theory of n -ary groups are used.

Findings and their discussion. Theorem 1. Let G – n -ary group, $\langle a_1, a_2, a_3, a_4 \rangle, \langle b_1, b_2, b_3, b_4 \rangle$ – parallelograms G , where $b_1 = a_2$, $b_2 = S_{a_2}(a_1)$, $b_4 = S_{a_3}(a_4)$. Then if $\langle a_4, a_3, a_5, a_6 \rangle, \langle a_6, a_5, a_7, a_8 \rangle, \dots, \langle a_{k-2}, a_{k-3}, a_{k-1}, a_k \rangle, \langle b_4, b_3, b_5, b_6 \rangle, \dots, \langle b_{l-2}, b_{l-3}, b_{l-1}, b_l \rangle$ – parallelograms G ($k \geq 1, l \geq 1$ – even natural numbers), then $\langle b_l, b_{l-1}, a_{k-1}, a_k \rangle$ – parallelogram G .

Theorem 2. Let G – semiabelian n -ary $2s$ -group, $a, b, x_1, x_2, \dots, x_k$ – arbitrary points from G . Then

1) $\langle a, b, S_{x_i}(S_{x_{i-1}}(\dots(S_{x_1}(a))\dots)), S_{x_i}(S_{x_{i-1}}(\dots(S_{x_1}(b))\dots)) \rangle$ – parallelogram G , if i – odd natural number;

2) $\langle a, b, S_{x_i}(S_{x_{i-1}}(\dots(S_{x_1}(b))\dots)), S_{x_i}(S_{x_{i-1}}(\dots(S_{x_1}(a))\dots)) \rangle$ – parallelogram G , if i – even natural number.

Conclusion. New communications between sequences of parallelograms of n -ary groups are received, new properties of self-returning of points concerning tops of polygons with even quantity of tops are established.

Key words: polygons of n -ary groups, semiabelian, self-returning of the n -ary elements of groups.

Известно, что приложения в теоретических движущей силой роста, но и критерием истинности [1]. В настоящее время развиваются прило-

жения теории n -арных групп в кодировании, полиадических автоматах, аффинной геометрии и других областях знания [2–3]. Значительный вклад в разработку приложений теории n -арных групп в аффинной геометрии был внесен С.А. Русаковым [4]: с помощью введенных на n -арной группе понятий параллелограмма, симметричности точек и вектора он определил n -арную rs -группу и доказал ее существование, построил аффинное пространство $W(G)$ методом фундаментальных последовательностей векторов полуабелевой rs -группы G . Следует отметить, что отдельные элементы аффинной геометрии на тернарных группах были построены Д. Вакареловым [5]. В работе Ю.И. Кулаженко [6] исследования, предпринятые С.А. Русаковым, получили дальнейшее развитие. В этой же монографии отдельная глава посвящена новому направлению – самосовмещению элементов n -арных групп.

Представляемая статья примыкает к вышеуказанной области изучения n -арных групп: устанавливаются связи между последовательностями параллелограммов n -арных групп и новые свойства самосовмещения точек относительно вершин многоугольников с четным количеством вершин.

Цель работы – исследовать свойства последовательностей параллелограммов n -арных групп, установить новые условия самосовмещения точек n -арных групп относительно вершин многоугольников с четным количеством вершин.

Материал и методы. Объектом исследования являются последовательности параллелограммов n -арных групп, многоугольники n -арных групп с четным количеством вершин. В работе используются общие и геометрические методы теории n -арных групп.

Основные определения, понятия и обозначения можно найти в [6]. Элементы n -арной группы G в дальнейшем будем называть точками.

Определение 1. *Четырехугольник $\langle a, b, c, d \rangle$ G называется параллелограммом G , если $[ab^{[-2]}]^{2n-4} b c = d$.*

Определение 2. *Упорядоченная пара $\langle a, b \rangle$ точек $a, b \in G$ называется направленным отрезком G и обозначается через $\overline{ab}$.*

Определение 3. *Пишут $\overline{ab} = \overline{cd}$ и говорят, что направленные отрезки $\overline{ab}$ и $\overline{cd}$ G равны, если четырехугольник $\langle a, c, d, b \rangle$ является параллелограммом G .*

Пусть V – множество всех направленных отрезков G .

Это отношение « $=$ » разбивает множество V на классы эквивалентности (см. [4]).

Определение 4. *Если $\overline{ab} \in V$, то множество $\{\overline{uv} \mid \overline{uv} \in V, \overline{uv} = \overline{ab}\}$ называется вектором G и обозначается через $\overline{ab}$ или одной малой буквой латинского алфавита; например $\overline{ab} = \overline{p}$. Через $V(G)$ обозначается множество всех векторов G .*

Определение 5. *Два вектора $\overline{p} = \overline{ab}$ и $\overline{q} = \overline{cd}$ из $V(G)$ называют равными и пишут $\overline{p} = \overline{q}$, если их представители $\overline{ab}$ и $\overline{cd}$ равны.*

В [4] доказано, что для любых точек равенства

$$[ab^{[-2]}]^{2n-4} b c = b, \quad (1)$$

$$[cb^{[-2]}]^{2n-4} a = b \quad (2)$$

эквивалентны.

Определение 6. *Если выполняется равенство (1) или (2), то b называют серединой отрезка $[ac]$. Если имеет место равенство (1) (равенство (2)), то точку c (точку a) называют точкой, симметричной точке a (точке c) относительно точки b , и обозначают через $S_b(a)$ (через $S_b(c)$), т.е. $c = S_b(a)$ ($a = S_b(c)$).*

Из (1) или (2) следует, что

$$S_b(a) = [ba^{[-2]}]^{2n-4} a b,$$

$$S_b(c) = [bc^{[-2]}]^{2n-4} c b.$$

Определение 7. *Пусть G – n -арная группа. Последовательность $e_1^{k(n-1)} \in G^{k(n-1)}$, где $k \geq 1$, называется нейтральной $k(n-1)$ -последовательностью G , если $[e_1^{k(n-1)}u] = u = [ue_1^{k(n-1)}]$ для любого элемента $u \in G$.*

Лемма 1 [6]. *Если четырехугольник $\langle a, b, c, d \rangle$ полуабелевой n -арной группы G является параллелограммом G , то параллелограммами G являются и четырехугольники $\langle b, c, d, a \rangle$, $\langle c, d, a, b \rangle$, $\langle d, a, b, c \rangle$, $\langle c, b, a, d \rangle$, $\langle b, a, d, c \rangle$, $\langle a, d, c, b \rangle$.*

Результаты и их обсуждение. Теорема 1. *Пусть G – n -арная группа, $\langle a_1, a_2, a_3, a_4 \rangle$, $\langle b_1, b_2, b_3, b_4 \rangle$ – параллелограммы G , где $b_1 = a_2$, $b_2 = S_{a_2}(a_1)$, $b_4 = S_{a_3}(a_4)$. Тогда если $\langle a_4, a_3, a_5, a_6 \rangle$, $\langle a_6, a_5, a_7, a_8 \rangle$, ..., $\langle a_{k-2}, a_{k-3}, a_{k-1}, a_k \rangle$, $\langle b_4, b_3, b_5, b_6 \rangle$, $\langle b_6, b_5, b_7, b_8 \rangle$, ..., $\langle b_{l-2}, b_{l-3}, b_{l-1}, b_l \rangle$ – параллелограммы G ($k \geq 1, l \geq 1$ – четные натуральные числа), то $\langle b_l, b_{l-1}, a_{k-1}, a_k \rangle$ – параллелограмм G .*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\langle a_1, a_2, a_3, a_4 \rangle$ – параллелограмм G , то по лемме 1 $\langle a_4, a_3, a_2, a_1 \rangle$ также параллелограмм G , что по определению 1 равносильно

$$[a_4 a_3^{[-2]} a_3^{2n-4} a_2] = a_1. \quad (3)$$

Так как $\langle b_1, b_2, b_3, b_4 \rangle$ – параллелограмм G , то по лемме 1 $\langle b_2, b_1, b_4, b_3 \rangle$ также параллелограмм G , что по определению 1 равносильно

$$[b_2 b_1^{[-2]} b_1^{2n-4} b_4] = b_3. \quad (4)$$

Рассмотрим $[a_4 a_3^{[-2]} a_3^{2n-4} b_3]$. Подставим (4) в это выражение

$$\begin{aligned} & [a_4 a_3^{[-2]} a_3^{2n-4} b_3] = \\ & = [a_4 a_3^{[-2]} a_3^{2n-4} [b_2 b_1^{[-2]} b_1^{2n-4} b_4]] = [a_4 a_3^{[-2]} a_3^{2n-4} b_2 b_1^{[-2]} b_1^{2n-4} b_4]. \end{aligned}$$

С учетом условия теоремы перепишем полученное равенство в виде

$$\begin{aligned} & [a_4 a_3^{[-2]} a_3^{2n-4} b_2 b_1^{[-2]} b_1^{2n-4} b_4] = \\ & = [a_4 a_3^{[-2]} a_3^{2n-4} S_{a_2}(a_1) a_2^{[-2]} a_2^{2n-4} b_4]. \end{aligned} \quad (5)$$

С учетом определения симметричных точек и нейтральности последовательностей перепишем равенство (5)

$$\begin{aligned} & [a_4 a_3^{[-2]} a_3^{2n-4} S_{a_2}(a_1) a_2^{[-2]} a_2^{2n-4} b_4] = \\ & = [a_4 a_3^{[-2]} a_3^{2n-4} S_{a_2}(a_1) a_2^{[-2]} a_2^{2n-4} b_4] = \\ & = [a_4 a_3^{[-2]} a_3^{2n-4} [a_2 a_1^{[-2]} a_1^{2n-4} a_2] a_2^{[-2]} a_2^{2n-4} b_4] = \\ & = [a_4 a_3^{[-2]} a_3^{2n-4} a_2 a_1^{[-2]} a_1^{2n-4} [a_2 a_2^{[-2]} a_2^{2n-4} b_4]] = \\ & = [a_4 a_3^{[-2]} a_3^{2n-4} a_2 a_1^{[-2]} a_1^{2n-4} b_4]. \end{aligned} \quad (6)$$

Полученное равенство перепишем с учетом (3) и нейтральности последовательностей

$$\begin{aligned} & [a_4 a_3^{[-2]} a_3^{2n-4} a_2 a_1^{[-2]} a_1^{2n-4} b_4] = \\ & = [[a_4 a_3^{[-2]} a_3^{2n-4} a_2] a_1^{[-2]} a_1^{2n-4} b_4] = \\ & = [a_1 a_1^{[-2]} a_1^{2n-4} b_4] = b_4. \end{aligned} \quad (7)$$

Таким образом, из преобразований (5)–(7) следует справедливость равенства

$$[a_4 a_3^{[-2]} a_3^{2n-4} b_3] = b_4,$$

из которого вытекает, что $\langle a_4, a_3, b_3, b_4 \rangle$ – параллелограмм G .

Так как условия теоремы удовлетворяют следствию 2 теоремы 2 из [7], то

$\langle a_4, a_3, a_{k-1}, a_k \rangle$, $\langle b_4, b_3, b_{l-1}, b_l \rangle$ – параллелограммы G (при $t=4$). Из того, что четырехугольники $\langle a_4, a_3, a_{k-1}, a_k \rangle$, $\langle b_4, b_3, b_{l-1}, b_l \rangle$, $\langle a_4, a_3, b_3, b_4 \rangle$ являются параллелограммами G , по определениям 3 и 5 следует справедливость следующих равенств:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a_4 a_3} &= \overrightarrow{a_k a_{k-1}}, \\ \overrightarrow{b_4 b_3} &= \overrightarrow{b_l b_{l-1}}, \\ \overrightarrow{a_4 a_3} &= \overrightarrow{b_4 b_3}. \end{aligned}$$

Отсюда в силу транзитивности равенства векторов G выполняется $\overrightarrow{b_l b_{l-1}} = \overrightarrow{a_k a_{k-1}}$, что равносильно тому, что $\langle b_l, b_{l-1}, a_{k-1}, a_k \rangle$ – параллелограмм G . Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть G – полуабелева n -арная 2s-группа, $a, b, x_1, x_2, \dots, x_k$ – произвольные точки из G . Тогда

- 1) $\langle a, b, S_{x_i}(S_{x_{i-1}}(\dots(S_{x_1}(a))\dots)), S_{x_i}(S_{x_{i-1}}(\dots(S_{x_1}(b))\dots)) \rangle$ – параллелограмм G , если i – нечетное натуральное число;
- 2) $\langle a, b, S_{x_i}(S_{x_{i-1}}(\dots(S_{x_1}(b))\dots)), S_{x_i}(S_{x_{i-1}}(\dots(S_{x_1}(a))\dots)) \rangle$ – параллелограмм G , если i – четное натуральное число.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно лемме 2.2.4 из [6] четырехугольник $\langle a, b, S_{x_1}(a), S_{x_1}(b) \rangle$ является параллелограммом G . Так как x_2 – середина отрезков $[S_{x_1}(b) S_{x_2}(S_{x_1}(b))], [S_{x_1}(a) S_{x_2}(S_{x_1}(a))]$, то согласно лемме 2.2.4 из [5] $\langle S_{x_1}(b), S_{x_1}(a), S_{x_2}(S_{x_1}(b)), S_{x_2}(S_{x_1}(a)) \rangle$ – параллелограмм G . Так как x_3 – середина отрезков $[S_{x_2}(S_{x_1}(b)) S_{x_3}(S_{x_2}(S_{x_1}(b)))],$

$[S_{x_2}(S_{x_1}(a)) S_{x_3}(S_{x_2}(S_{x_1}(a)))]$, то $\langle S_{x_2}(S_{x_1}(a)), S_{x_2}(S_{x_1}(b)), S_{x_3}(S_{x_2}(S_{x_1}(a))), S_{x_3}(S_{x_2}(S_{x_1}(b))) \rangle$ – параллелограмм G . Продолжая указанный процесс, получим, что x_{i-1} – середина отрезков $[S_{x_{i-1}}(S_{x_{i-2}}(\dots(S_{x_1}(a))\dots)) S_{x_i}(S_{x_{i-1}}(\dots(S_{x_1}(a))\dots))],$ $[S_{x_{i-1}}(S_{x_{i-2}}(\dots(S_{x_1}(b))\dots)) S_{x_i}(S_{x_{i-1}}(\dots(S_{x_1}(b))\dots))]$. Если i – нечетное натуральное число, то, применяя лемму 2.2.4 из [5], имеем, что $\langle S_{x_{i-1}}(S_{x_{i-2}}(\dots(S_{x_1}(b))\dots)), S_{x_{i-1}}(S_{x_{i-2}}(\dots(S_{x_1}(a))\dots)), S_{x_i}(S_{x_{i-1}}(\dots(S_{x_1}(b))\dots)), S_{x_i}(S_{x_{i-1}}(\dots(S_{x_1}(a))\dots)) \rangle$ – параллелограмм G ; если i – четное натуральное число, то, согласно лемме 2.2.4 из [6], четырехугольник $\langle S_{x_{i-1}}(S_{x_{i-2}}(\dots(S_{x_1}(a))\dots)), S_{x_{i-1}}(S_{x_{i-2}}(\dots(S_{x_1}(b))\dots)),$

$S_{x_i}(S_{x_{i-1}}(\dots(S_{x_1}(a))\dots)), S_{x_i}(S_{x_{i-1}}(\dots(S_{x_1}(b))\dots)) >$ является параллелограммом G . Так как четырехугольники $\langle a, b, S_{x_1}(a), S_{x_1}(b) \rangle$, $\langle S_{x_1}(b), S_{x_1}(a), S_{x_2}(S_{x_1}(b)), S_{x_2}(S_{x_1}(a)) \rangle$, $\dots$, $\langle S_{x_{i-1}}(S_{x_{i-2}}(\dots(S_{x_1}(b))\dots)), S_{x_{i-1}}(S_{x_{i-2}}(\dots(S_{x_1}(a))\dots)), S_{x_i}(S_{x_{i-1}}(\dots(S_{x_1}(b))\dots)), S_{x_i}(S_{x_{i-1}}(\dots(S_{x_1}(a))\dots)) \rangle$ (i – нечетное), $\langle S_{x_{i-1}}(S_{x_{i-2}}(\dots(S_{x_1}(b))\dots)), S_{x_{i-1}}(S_{x_{i-2}}(\dots(S_{x_1}(a))\dots)), S_{x_i}(S_{x_{i-1}}(\dots(S_{x_1}(b))\dots)), S_{x_i}(S_{x_{i-1}}(\dots(S_{x_1}(a))\dots)) \rangle$ (i – четное) являются параллелограммами G , то согласно теореме 2 из [7] $\langle a, b, S_{x_i}(S_{x_{i-1}}(\dots(S_{x_1}(a))\dots)), S_{x_i}(S_{x_{i-1}}(\dots(S_{x_1}(b))\dots)) \rangle$ – параллелограмм G , если i – нечетное натуральное число; $\langle a, b, S_{x_i}(S_{x_{i-1}}(\dots(S_{x_1}(b))\dots)), S_{x_i}(S_{x_{i-1}}(\dots(S_{x_1}(a))\dots)) \rangle$ – параллелограмм G , если i – четное натуральное число. Теорема доказана.

Теорема 3. Пусть G – полуабелева n -арная группа, $\langle a_1, a_2, \dots, a_{2k} \rangle$ ($k \in \mathbb{N}$) – многоугольник G такой, что произвольная точка $p \in G$ самосовмещается относительно вершин этого многоугольника, т.е. $S_{a_1}(S_{a_2}(\dots(S_{a_{2k}}(p))\dots)) = p$, и пусть точки $b_1, b_2, \dots, b_{2k} \in G$ такие, что справедливы равенства

$$\overline{a_1 a_2} = \overline{b_1 b_2}, \quad (8)$$

$$\overline{a_2 a_3} = \overline{b_2 b_3}, \quad (9)$$

$$\overline{a_{2k-1} a_{2k}} = \overline{b_{2k-1} b_{2k}}. \quad (10)$$

Тогда для любого $p \in G$ справедливо равенство

$$S_{b_1}(S_{b_2}(\dots(S_{b_{2k}}(p))\dots)) = p,$$

т.е. $p \in G$ самосовмещается относительно вершин многоугольника $\langle b_1, b_2, \dots, b_{2k} \rangle$.

Доказательство. Равенства (8)–(10) ввиду определения 3 равносильны следующим равенствам:

$$[a_1 a_2^{[-2]} a_2 b_2] = b_1, \quad (11)$$

$$[a_2 a_3^{[-2]} a_3 b_3] = b_2, \quad (12)$$

$$[a_{2k-1} a_{2k}^{[-2]} a_{2k} b_{2k}] = b_{2k-1}. \quad (13)$$

Рассмотрим выражение $S_{b_1}(S_{b_2}(\dots(S_{b_{2k}}(p))\dots))$, которое в силу определения симметричных точек эквивалентно следующему:

$$S_{b_1}(S_{b_2}(\dots(S_{b_{2k}}(p))\dots)) =$$

$$\begin{aligned} &= [b_1(S_{b_2}(\dots(S_{b_{2k}}(p))\dots))^{[-2]}(S_{b_2}(\dots(S_{b_{2k}}(p))\dots))\dots b_1] = \dots = \\ &= [b_1 b_2^{[-2]} b_2 b_3 b_4^{[-2]} b_4 b_5 b_6^{[-2]} b_6 \dots \\ &\dots b_{2k-1} b_{2k}^{[-2]} b_{2k} p b_{2k}^{[-2]} b_{2k} b_{2k-1} \dots \\ &\dots b_6^{[-2]} b_6 b_5 b_4^{[-2]} b_4 b_3 b_2^{[-2]} b_2 b_1]. \quad (14) \end{aligned}$$

Подставляя в (7) значения b_t из равенств (11)–(13), где $t=1, 3, 5, \dots, 2k-1$, получим

$$\begin{aligned} &[[a_1 a_2^{[-2]} a_2 b_2] b_2^{[-2]} b_2 [a_3 a_4^{[-2]} a_4 b_4] \\ &b_4^{[-2]} b_4 [a_5 a_6^{[-2]} a_6 b_6] b_6^{[-2]} b_6 \dots \\ &\dots b_{2k-1} b_{2k}^{[-2]} b_{2k} p b_{2k}^{[-2]} b_{2k} b_{2k-1} \dots b_6^{[-2]} b_6 | \\ &[a_5 a_6^{[-2]} a_6 b_6] b_4^{[-2]} b_4 [a_3 a_4^{[-2]} a_4 b_4] \\ &b_2^{[-2]} b_2 [a_1 a_2^{[-2]} a_2 b_2]]. \quad (15) \end{aligned}$$

Применим свойство полуабелевости G к равенству (15). С учетом нейтральности последовательностей получим

$$\begin{aligned} &[[a_1 a_2^{[-2]} a_2 b_2] b_2^{[-2]} b_2 [a_3 a_4^{[-2]} a_4 b_4] \\ &b_4^{[-2]} b_4 [a_5 a_6^{[-2]} a_6 b_6] b_6^{[-2]} b_6 \dots \\ &\dots b_{2k}^{[-2]} b_{2k} p b_{2k}^{[-2]} b_{2k} \dots b_6^{[-2]} b_6 [a_5 a_6^{[-2]} a_6 b_6] \\ &b_4^{[-2]} b_4 [a_3 a_4^{[-2]} a_4 b_4] \\ &b_2^{[-2]} b_2 [a_1 a_2^{[-2]} a_2 b_2]] = \\ &= [a_1 a_2^{[-2]} a_2 [b_2 b_2^{[-2]} b_2 a_3] a_4^{[-2]} a_4 | \\ &[b_4 b_4^{[-2]} b_4 a_5] a_6^{[-2]} a_6 [b_6 b_6^{[-2]} b_6 \dots \\ &\dots b_{2k}^{[-2]} b_{2k} p b_{2k}^{[-2]} b_{2k} \dots b_6^{[-2]} b_6 \\ &[a_5 a_6^{[-2]} a_6 b_6] b_4^{[-2]} b_4 [a_3 a_4^{[-2]} a_4 b_4] \\ &b_2^{[-2]} b_2 [a_1 a_2^{[-2]} a_2 b_2]] = \\ &= [a_1 a_2^{[-2]} a_2 a_3 a_4^{[-2]} a_4 a_5 a_6^{[-2]} a_6 \dots a_{2k}^{[-2]} a_{2k} p b_{2k}^{[-2]} b_{2k} \dots \\ &\dots b_6^{[-2]} b_6 [a_5 a_6^{[-2]} a_6 b_6] b_4^{[-2]} b_4 [a_3 a_4^{[-2]} a_4 b_4] \\ &b_2^{[-2]} b_2 [a_1 a_2^{[-2]} a_2 b_2]] = \\ &= [a_1 a_2^{[-2]} a_2 a_3 a_4^{[-2]} a_4 a_5 a_6^{[-2]} a_6 \dots a_{2k}^{[-2]} a_{2k} p b_{2k}^{[-2]} b_{2k} \dots \\ &\dots b_6^{[-2]} b_6 [b_6 a_6^{[-2]} a_6 a_5] b_4^{[-2]} b_4 [b_4 a_4^{[-2]} a_4 a_3] \\ &b_2^{[-2]} b_2 [b_2 a_2^{[-2]} a_2 a_1]] = \\ &= [a_1 a_2^{[-2]} a_2 a_3 a_4^{[-2]} a_4 a_5 a_6^{[-2]} a_6 \dots a_{2k}^{[-2]} a_{2k} p b_{2k}^{[-2]} b_{2k} \dots \\ &\dots b_6^{[-2]} b_6 b_6] a_6^{[-2]} a_6 [a_5 b_4^{[-2]} b_4 b_4] \\ &[a_4^{[-2]} a_4 [a_3 b_2^{[-2]} b_2 b_2] a_2^{[-2]} a_2 a_1]] = \\ &= [a_1 a_2^{[-2]} a_2 a_3 a_4^{[-2]} a_4 a_5 a_6^{[-2]} a_6 \dots a_{2k}^{[-2]} a_{2k} p \end{aligned}$$

$$a_{2k}^{[-2]^{2n-4}} a_{2k}^{[-2]^{2n-4}} \dots a_6^{[-2]^{2n-4}} a_6^{[-2]^{2n-4}} a_5 a_4^{[-2]^{2n-4}} a_4^{[-2]^{2n-4}} a_3 a_2^{[-2]^{2n-4}} a_2^{[-2]^{2n-4}} a_1]. \quad (16)$$

Так как произвольная точка $p \in G$ самосовмещается относительно вершин многоугольника $\langle a_1, a_2, \dots, a_{2k} \rangle$, то (16) перепишется в виде

$$[a_1 a_2^{[-2]^{2n-4}} a_2^{[-2]^{2n-4}} a_3 a_4^{[-2]^{2n-4}} a_4^{[-2]^{2n-4}} a_5 a_6^{[-2]^{2n-4}} a_6^{[-2]^{2n-4}} \dots a_{2k}^{[-2]^{2n-4}} a_{2k}^{[-2]^{2n-4}} p a_{2k}^{[-2]^{2n-4}} a_{2k}^{[-2]^{2n-4}} \dots \dots a_6^{[-2]^{2n-4}} a_6^{[-2]^{2n-4}} a_5 a_4^{[-2]^{2n-4}} a_4^{[-2]^{2n-4}} a_3 a_2^{[-2]^{2n-4}} a_2^{[-2]^{2n-4}} a_1] = p.$$

Следовательно, справедливо равенство

$$[b_1 b_2^{[-2]^{2n-4}} b_2^{[-2]^{2n-4}} b_3 b_4^{[-2]^{2n-4}} b_4^{[-2]^{2n-4}} \dots b_{2k}^{[-2]^{2n-4}} b_{2k}^{[-2]^{2n-4}} p b_{2k}^{[-2]^{2n-4}} b_{2k}^{[-2]^{2n-4}} \dots \dots b_4^{[-2]^{2n-4}} b_4^{[-2]^{2n-4}} b_3 b_2^{[-2]^{2n-4}} b_2^{[-2]^{2n-4}} b_1] = p,$$

которое эквивалентно

$$S_{b_1}(S_{b_2}(\dots S_{b_{2k}}(p)\dots)) = p,$$

т.е. $p \in G$ самосовмещается относительно вершин многоугольника $\langle b_1, b_2, \dots, b_{2k} \rangle$. Теорема доказана.

Заключение. Получены новые связи между последовательностями параллелограммов n -арных групп, установлены новые свойства самосовмещения точек относительно вершин многоугольников с четным количеством вершин.

ЛИТЕРАТУРА

1. Молодший, В.Н. Очерки по философским вопросам математики / В.Н. Молодший. – М.: Просвещение, 1969. – 304 с.

2. Golay, M.J.E. Notes on Digital Coding / M.J.E. Golay // Proc. IRE. – 1949. – Vol. 37, № 6. – P. 657.
3. Grzymala-Busse, J.W. Automorphisms of Polyadic Automata / J.W. Grzymala-Busse // J. Assoc. Computing Machinery. – 1969. – Vol. 16, № 2. – P. 208–219.
4. Русаков, С.А. Некоторые приложения теории n -арных групп / С.А. Русаков. – Минск: Беларуская навука, 1998. – 167 с.
5. Vakarelov, D. Ternary groups / D. Vakarelov // God. Sofij. Univ., Mat. Fak. – 1966–1968. – Vol. 61. – P. 71–105.
6. Кулаженко, Ю.И. Полиадические операции и их приложения / Ю.И. Кулаженко. – Минск: Изд. центр БГУ, 2014. – 311 с.
7. Кирилук, Д.И. Исследование последовательностей параллелограммов n -арных групп / Д.И. Кирилук // Изв. Гомельск. ун-та. – 2015. – № 3(90). – С. 118–123.

REFERENCES

1. Molodshiy V.N. *Ocherki po filosofskim voprosam matematiki* [Stories on Philosophical Issues of Mathematics], Moskva, Prosveshcheniye, 1969, 304 p.
2. Golay, M.J.E. Notes on Digital Coding / M.J.E. Golay // Proc. IRE. – 1949. – Vol. 37. – № 6. – P. 657.
3. Grzymala-Busse, J.W. Automorphisms of Polyadic Automata / J.W. Grzymala-Busse // J. Assoc. Computing Machinery. – 1969. – Vol. 16. – № 2. – P. 208–219.
4. Rusakov S.A. *Nekotoriye prilozheniya teorii n-arnikh grupp* [Some Appendices to the Theory of n -ary Groups], Minsk, Belaruskaya navuka, 1998, 167 p.
5. Vakarelov, D. Ternary groups / D. Vakarelov // God. Sofij. Univ., Mat. Fak. – 1966–1968. – Vol. 61. – P. 71–105.
6. Kulazhenko Yu.I. *Poliadicheskiye operatsii i ikh prilozheniya* [Polyadic Operations and their Appendices], Minsk, Izd. Tsentr BGU, 2014, 311 p.
7. Kiriliuk D.I. *Izvestiya Gomelskogo universiteta* [Newsletter of Gomel State University], 2015, 3(90), pp. 118–123.

Поступила в редакцию 17.12.2015

Адрес для корреспонденции: e-mail: kirilyuk.denis@g.mail.com – Кирилук Д.И.