УДК 512.567.5

Последовательности параллелограммов и самосовмещение элементов *n*-арных групп

Д.И. Кирилюк
Учреждение образования «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»

Представляемая статья относится к области исследования n-арных групп геометрическими методами и развитию приложений теории n-арных групп в аффинной геометрии.

Цель работы – установить свойства последовательностей параллелограммов n-арных групп и новые условия самосовмещения точек n-арных групп относительно вершин многоугольников с четным количеством вершин.

Материал и методы. *Объектом исследования являются последовательности параллелограммов n-арных групп, многоугольники n-арных групп с четным количеством вершин. В работе используются общие и геометрические методы теории n-арных групп.*

Результаты и их обсуждение. Теорема 1. *Пусть G – n-арная группа,* $<a_1,a_2,a_3,a_4>$, $<b_1,b_2,b_3,b_4>$ *– параллелограммы G, где* $b_1=a_2$, $b_2=S_{a_2}(a_1)$, $b_4=S_{a_3}(a_4)$. *Тогда если* $<a_4,a_3,a_5,a_6>$, $<a_6,a_5,a_7,a_8>$, …, $<a_{k-2},a_{k-3},a_{k-1},a_k>$, $<b_4,b_3,b_5,b_6>$, $<b_6,b_5,b_7,b_8>$, …, $<b_{l-2},b_{l-3},b_{l-1},b_l>$ *– параллелограммы G (* $k\ge1$, $l\ge1$ *– четные натуральные числа), то* $l\ge1$ $<b_l,b_{l-1},a_{k-1},a_k>$ *– параллелограмм G.*

Теорема 2. *Пусть G – полуабелева n-арная 2s-группа,* $a,b,x_1,x_2,...,x_k$ *– произвольные точки из G. Тогда*
1) $<a,b,S_{x_i}(S_{x_i-1}(...(S_{x_i}(a))...)),S_{x_i}(S_{x_i-1}(...(S_{x_i}(b))...))>$ *– параллелограмм G, если i – нечетное натуральное число;*
2) $<a,b,S_{x_i}(S_{x_i-1}(...(S_{x_i}(b))...)),S_{x_i}(S_{x_i-1}(...(S_{x_i}(a))...))>$ *– параллелограмм G, если i – четное натуральное число.*

Заключение. *Получены новые связи между последовательностями параллелограммов n-арных групп, установлены новые свойства самосовмещения точек относительно вершин многоугольников с четным количеством вершин.*

Ключевые слова: *многоугольники n-арных групп, полуабелевость, самосовмещения элементов n-арных групп.*

Sequences of Parallelograms and Self-Returning of Elements of n-ary Groups

D.I. Kirilyuk
Educational Establishment «Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics»

The represented article belongs to area of the research n-ary of groups by geometrical methods and to development of applications of the theory of n-ary groups in affine geometry.

The purpose of the work is to investigate properties of sequences of parallelograms of n-ary groups, to establish new conditions of self- returning of points of n-ary groups concerning tops of polygons with even quantity of tops.

Material and methods. *Object of the research are sequences of parallelograms of n-ary groups, polygons of n-ary groups with even quantity of tops. In the work the general and geometrical methods of the theory of n-ary groups are used.*

Findings and their discussion. Theorem 1. *Let G – n-ary group,* $<a_1,a_2,a_3,a_4>$, $<b_1,b_2,b_3,b_4>$ *– parallelograms G, where* $b_1=a_2$, $b_2=S_{a_2}(a_1)$, $b_4=S_{a_3}(a_4)$. *Then if* $<a_4,a_3,a_5,a_6>$, $<a_6,a_5,a_7,a_8>$, …, $<a_{k-2},a_{k-3},a_{k-1},a_k>$, $<b_4,b_3,b_5,b_6>$, $<b_6,b_5,b_7,b_8>$, …, $<b_{l-2},b_{l-3},b_{l-1},b_l>$ *– parallelograms G (k* ≥1, $l\ge1$ *– even natural numbers), then* $l\ge1$ $<b_l,b_{l-1},a_{k-1},a_k>$ *– parallelograms G.*

Theorem 2. *Let G – semiabelian n-ary 2s-group,* $a,b,x_1,x_2,...,x_k$*– arbitrary points from G. Then*
1) $<a,b,S_{x_i}(S_{x_i-1}(...(S_{x_i}(a))...)),S_{x_i}(S_{x_i-1}(...(S_{x_i}(b))...))>$ *– parallelogram G, if i – odd natural number;*
2) $<a,b,S_{x_i}(S_{x_i-1}(...(S_{x_i}(b))...)),S_{x_i}(S_{x_i-1}(...(S_{x_i}(a))...))>$ *– parallelogram G, if i – even natural number.*

Conclusion. *New communications between sequences of parallelograms of n-ary groups are received, new properties of self-returning of points concerning tops of polygons with even quantity of tops are established.*

Key words*: polygons of n-ary groups, semiabelian, self- returning of the n-ary elements of groups.*

Известно, что приложения в теоретических науках являются не только источником и движущей силой роста, но и критерием истинности [1]. В настоящее время развиваются прило-

Репозиторий ВГУ

жения теории n-арных групп в кодировании, полиадических автоматах, аффинной геометрии и других областях знания [2–3]. Значительный вклад в разработку приложений теории n-арных групп в аффинной геометрии был внесен С.А. Русаковым [4]: с помощью введенных на n-арной группе понятий параллелограмма, симметричности точек и вектора он определил n-арную rs-группу и доказал ее существование, построил аффинное пространство $W(G)$ методом фундаментальных последовательностей векторов полуабелевой rs-группы G. Следует отметить, что отдельные элементы аффинной геометрии на тернарных группах были построены Д. Вакареловым [5]. В работе Ю.И. Кулаженко [6] исследования, предпринятые С.А. Русаковым, получили дальнейшее развитие. В этой же монографии отдельная глава посвящена новому направлению – самосовмещению элементов n-арных групп.

Представляемая статья примыкает к вышеуказанной области изучения n-арных групп: устанавливаются связи между последовательностями параллелограммов n-арных групп и новые свойства самосовмещения точек относительно вершин многоугольников с четным количеством вершин.

Цель работы – исследовать свойства последовательностей параллелограммов n-арных групп, установить новые условия самосовмещения точек n-арных групп относительно вершин многоугольников с четным количеством вершин.

Материал и методы. Объектом исследования являются последовательности параллелограммов n-арных групп, многоугольники n-арных групп с четным количеством вершин. В работе используются общие и геометрические методы теории n-арных групп.

Основные определения, понятия и обозначения можно найти в [6]. Элементы n-арной группы G в дальнейшем будем называть точками.

Определение 1. *Четырехугольник* $<a,b,c,d>$ *G называется параллелограммом G, если* $[ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}c]=d$.

Определение 2. *Упорядоченная пара* $<a,b>$ *точек* $a,b\in G$ *называется направленным отрезком G и обозначается через* $\overline{ab}$.

Определение 3. *Пишут* $\overline{ab}=\overline{cd}$ *и говорят, что направленные отрезки* $\overline{ab}$ *и* $\overline{cd}$ *G равны, если четырехугольник* $<a,c,d,b>$ *является параллелограммом G.*

Пусть V – множество всех направленных отрезков G.

Это отношение «=» разбивает множество V на классы эквивалентности (см. [4]).

Определение 4. *Если* $\overline{ab}\in V$, *то множество* $\{\overline{uv}\mid \overline{uv}\in V, \overline{uv}=\overline{ab}\}$ *называется вектором G и обозначается через* $\overrightarrow{ab}$ *или одной малой буквой латинского алфавита; например* $\overrightarrow{ab}=\vec{p}$. *Через* $V(G)$ *обозначается множество всех векторов G.*

Определение 5. *Два вектора* $\vec{p}=\overrightarrow{ab}$ *и* $\vec{q}=\overrightarrow{cd}$ *из $V(G)$ называют равными и пишут* $\vec{p}=\vec{q}$, *если их представители* $\overline{ab}$ *и* $\overline{cd}$ *равны.*

В [4] доказано, что для любых точек равенства

$$[ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}c]=b, \tag{1}$$

$$[cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}a]=b \tag{2}$$

эквивалентны.

Определение 6. *Если выполняется равенство (1) или (2), то* b *называют серединой отрезка* $[ac]$. *Если имеет место равенство (1) (равенство (2)), то точку* c *(точку* a*) называют точкой, симметричной точке* a *(точке* c*) относительно точки* b, *и обозначают через* $S_b(a)$ *(через* $S_b(c)$ *), т.е.* $c=S_b(a)$ $(a=S_b(c))$.

Из (1) или (2) следует, что

$$S_b(a)=[ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b],$$

$$S_b(c)=[bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b].$$

Определение 7. *Пусть G – n-арная группа. Последовательность* $e_1^{k(n-1)}\in G^{k(n-1)}$, *где* $k\geq 1$, *называется нейтральной $k(n–1)$-последовательностью G, если* $[e_1^{k(n-1)}u]=u=[ue_1^{k(n-1)}]$ *для любого элемента* $u\in G$.

Лемма 1 [6]. *Если четырехугольник* $<a,b,c,d>$ *полуабелевой n-арной группы G является параллелограммом G, то параллелограммами G являются и четырехугольники* $<b,c,d,a>$, $<c,d,a,b>$, $<d,a,b,c>$, $<c,b,a,d>$, $<b,a,d,c>$, $<a,d,c,b>$.

Результаты и их обсуждение. Теорема 1. *Пусть G – n-арная группа,* $<a_1,a_2,a_3,a_4>$, $<b_1,b_2,b_3,b_4>$ *– параллелограммы G, где* $b_1=a_2$, $b_2=S_{a_2}(a_1)$, $b_4=S_{a_3}(a_4)$. *Тогда если* $<a_4,a_3,a_5,a_6>$, $<a_6,a_5,a_7,a_8>$, …, $<a_{k-2},a_{k-3},a_{k-1},a_k>$, $<b_4,b_3,b_5,b_6>$, $<b_6,b_5,b_7,b_8>$, …, $<b_{l-2},b_{l-3},b_{l-1},b_l>$ *– параллелограммы G (* $k\geq 1$, $l\geq 1$ *– четные натуральные числа), то* $<b_l,b_{l-1},a_{k-1},a_k>$ *– параллелограмм G.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $<a_1, a_2, a_3, a_4>$ – параллелограмм *G*, то по лемме 1 $<a_4, a_3, a_2, a_1>$ также параллелограмм *G*, что по определению 1 равносильно

$$[a_4 a_3^{[-2]} \overset{2n-4}{a_3} a_2] = a_1. \qquad (3)$$

Так как $<b_1, b_2, b_3, b_4>$ – параллелограмм *G*, то по лемме 1 $<b_2, b_1, b_4, b_3>$ также параллелограмм *G*, что по определению 1 равносильно

$$[b_2 b_1^{[-2]} \overset{2n-4}{b_1} b_4] = b_3. \qquad (4)$$

Рассмотрим $[a_4 a_3^{[-2]} \overset{2n-4}{a_3} b_3]$. Подставим (4) в это выражение

$$[a_4 a_3^{[-2]} \overset{2n-4}{a_3} b_3] =$$

$$= [a_4 a_3^{[-2]} \overset{2n-4}{a_3} [b_2 b_1^{[-2]} \overset{2n-4}{b_1} b_4]] = [a_4 a_3^{[-2]} \overset{2n-4}{a_3} b_2 b_1^{[-2]} \overset{2n-4}{b_1} b_4].$$

С учетом условия теоремы перепишем полученное равенство в виде

$$[a_4 a_3^{[-2]} \overset{2n-4}{a_3} b_2 b_1^{[-2]} \overset{2n-4}{b_1} b_4] =$$

$$= [a_4 a_3^{[-2]} \overset{2n-4}{a_3} S_{a_2}(a_1) a_2^{[-2]} \overset{2n-4}{a_2} b_4]. \qquad (5)$$

С учетом определения симметричных точек и нейтральности последовательностей перепишем равенство (5)

$$[a_4 a_3^{[-2]} \overset{2n-4}{a_3} S_{a_2}(a_1) a_2^{[-2]} \overset{2n-4}{a_2} b_4] =$$

$$= [a_4 a_3^{[-2]} \overset{2n-4}{a_3} S_{a_2}(a_1) a_2^{[-2]} \overset{2n-4}{a_2} b_4] =$$

$$= [a_4 a_3^{[-2]} \overset{2n-4}{a_3} [a_2 a_1^{[-2]} \overset{2n-4}{a_1} a_2] a_2^{[-2]} \overset{2n-4}{a_2} b_4] =$$

$$= [a_4 a_3^{[-2]} \overset{2n-4}{a_3} a_2 a_1^{[-2]} \overset{2n-4}{a_1} [a_2 a_2^{[-2]} \overset{2n-4}{a_2} b_4]] =$$

$$= [a_4 a_3^{[-2]} \overset{2n-4}{a_3} a_2 a_1^{[-2]} \overset{2n-4}{a_1} b_4]. \qquad (6)$$

Полученное равенство перепишем с учетом (3) и нейтральности последовательностей

$$[a_4 a_3^{[-2]} \overset{2n-4}{a_3} a_2 a_1^{[-2]} \overset{2n-4}{a_1} b_4] =$$

$$= [[a_4 a_3^{[-2]} \overset{2n-4}{a_3} a_2] a_1^{[-2]} \overset{2n-4}{a_1} b_4] =$$

$$= [a_1 a_1^{[-2]} \overset{2n-4}{a_1} b_4] = b_4. \qquad (7)$$

Таким образом, из преобразований (5)–(7) следует справедливость равенства

$$[a_4 a_3^{[-2]} \overset{2n-4}{a_3} b_3] = b_4,$$

из которого вытекает, что $<a_4, a_3, b_3, b_4>$ – параллелограмм *G*.

Так как условия теоремы удовлетворяют следствию 2 теоремы 2 из [7], то $<a_4, a_3, a_{k-1}, a_k>$, $<b_4, b_3, b_{l-1}, b_l>$ – параллелограммы *G* (при *t*=4). Из того, что четырехугольники $<a_4, a_3, a_{k-1}, a_k>$, $<b_4, b_3, b_{l-1}, b_l>$, $<a_4, a_3, b_3, b_4>$ являются параллелограммами *G*, по определениям 3 и 5 следует справедливость следующих равенств:

$$\overrightarrow{a_4 a_3} = \overrightarrow{a_k a_{k-1}},$$

$$\overrightarrow{b_4 b_3} = \overrightarrow{b_l b_{l-1}},$$

$$\overrightarrow{a_4 a_3} = \overrightarrow{b_4 b_3}.$$

Отсюда в силу транзитивности равенства векторов *G* выполняется $\overrightarrow{b_l b_{l-1}} = \overrightarrow{a_k a_{k-1}}$, что равносильно тому, что $<b_l, b_{l-1}, a_{k-1}, a_k>$ – параллелограмм *G*. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть G – полуабелева n-арная 2s-группа,* $a, b, x_1, x_2, \ldots, x_k$ *– произвольные точки из G. Тогда*

1) $<a, b, S_{x_i}(S_{x_i-1}(\ldots(S_{x_i}(a))\ldots)), S_{x_i}(S_{x_i-1}(\ldots(S_{x_i}(b))\ldots))>$ *– параллелограмм G, если i – нечетное натуральное число;*

2) $<a, b, S_{x_i}(S_{x_i-1}(\ldots(S_{x_i}(b))\ldots)), S_{x_i}(S_{x_i-1}(\ldots(S_{x_i}(a))\ldots))>$ *– параллелограмм G, если i – четное натуральное число.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно лемме 2.2.4 из [6] четырехугольник $<a, b, S_{x_1}(a), S_{x_1}(b)>$ является параллелограммом *G*. Так как x_2 – середина отрезков $[S_{x_1}(b)\ S_{x_2}(S_{x_1}(b))], [S_{x_1}(a)\ S_{x_2}(S_{x_1}(a))]$, то согласно лемме 2.2.4 из [5] $<S_{x_1}(b), S_{x_1}(a), S_{x_2}(S_{x_1}(b)), S_{x_2}(S_{x_1}(a))>$ – параллелограмм *G*. Так как x_3 – середина отрезков

$$[S_{x_2}(S_{x_1}(b))\ S_{x_3}(S_{x_2}(S_{x_1}(b)))]$$

$$[S_{x_2}(S_{x_1}(a))\ S_{x_3}(S_{x_2}(S_{x_1}(a)))],$$ то

$<S_{x_2}(S_{x_1}(a)), S_{x_2}(S_{x_1}(b)), S_{x_3}(S_{x_2}(S_{x_1}(a))), S_{x_3}(S_{x_2}(S_{x_1}(b)))>$ – параллелограмм *G*. Продолжая указанный процесс, получим, что x_{i-1} – середина отрезков $[S_{x_{i-1}}(S_{x_{i-2}}(\ldots(S_{x_1}(a))\ldots))\ S_{x_i}(S_{x_{i-1}}(\ldots(S_{x_1}(a))\ldots))]$, $[S_{x_{i-1}}(S_{x_i}(\ldots(S_{x_1}(b))\ldots))\ S_{x_i}(S_{x_{i-1}}(\ldots(S_{x_1}(b))\ldots))]$. Если i – нечетное натуральное число, то, применяя лемму 2.2.4 из [5], имеем, что $<S_{x_{i-1}}(S_{x_{i-2}}(\ldots(S_{x_1}(b))\ldots)), S_{x_{i-1}}(S_{x_{i-2}}(\ldots(S_{x_1}(a))\ldots)), S_{x_i}(S_{x_{i-1}}(\ldots(S_{x_1}(b))\ldots)), S_{x_i}(S_{x_{i-1}}(\ldots(S_{x_1}(a))\ldots))>$ – параллелограмм *G*; если i – четное натуральное число, то, согласно лемме 2.2.4 из [6], четырехугольник $<S_{x_{i-1}}(S_{x_{i-2}}(\ldots(S_{x_1}(a))\ldots)), S_{x_{i-1}}(S_{x_{i-2}}(\ldots(S_{x_1}(b))\ldots)),$

Репозиторий ВГУ

$S_{x_i}(S_{x_{i-1}}(...(S_{x_1}(a))...)), S_{x_i}(S_{x_{i-1}}(...(S_{x_1}(b))...)) >$ является параллелограммом G. Так как четырехугольники $< a, b, S_{x_1}(a), S_{x_1}(b) >$, $< S_{x_1}(b), S_{x_1}(a), S_{x_2}(S_{x_1}(b)), S_{x_2}(S_{x_1}(a)) >$, $< S_{x_2}(S_{x_1}(a)), S_{x_2}(S_{x_1}(b)), S_{x_3}(S_{x_2}(S_{x_1}(a))), S_{x_3}(S_{x_2}(S_{x_1}(b))) >$, …, $< S_{x_{i-1}}(S_{x_{i-2}}(...(S_{x_1}(b))...)), S_{x_{i-1}}(S_{x_{i-2}}(...(S_{x_1}(a))...)), S_{x_i}(S_{x_{i-1}}(...(S_{x_1}(b))...)), S_{x_i}(S_{x_{i-1}}(...(S_{x_1}(a))...)) >$ (i – нечетное), $< S_{x_{i-1}}(S_{x_{i-2}}(...(S_{x_1}(b))...)), S_{x_{i-1}}(S_{x_{i-2}}(...(S_{x_1}(a))...)), S_{x_i}(S_{x_{i-1}}(...(S_{x_1}(b))...)), S_{x_i}(S_{x_{i-1}}(...(S_{x_1}(a))...)) >$ (i – четное) являются параллелограммами G, то согласно теореме 2 из [7] $< a, b, S_{x_i}(S_{x_{i-1}}(...(S_{x_1}(a))...)), S_{x_i}(S_{x_{i-1}}(...(S_{x_1}(b))...)) >$ – параллелограмм G, если i – нечетное натуральное число; $< a, b, S_{x_i}(S_{x_{i-1}}(...(S_{x_1}(b))...)), S_{x_i}(S_{x_{i-1}}(...(S_{x_1}(a))...)) >$ – параллелограмм G, если i – четное натуральное число. Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть G – полуабелева n-арная группа, $< a_1, a_2, ..., a_{2k} >$ $(k \in \mathbf{N})$ – многоугольник G такой, что произвольная точка $p \in G$ самосовмещается относительно вершин этого многоугольника, т.е. $S_{a_1}(S_{a_2}(...S_{a_{2k}}(p)...)) = p$, и пусть точки $b_1, b_2, ..., b_{2k} \in G$ такие, что справедливы равенства*

$$\overrightarrow{a_1a_2} = \overrightarrow{b_1b_2}, \tag{8}$$

$$\overrightarrow{a_2a_3} = \overrightarrow{b_2b_3}, \tag{9}$$

$$\dots$$

$$\overrightarrow{a_{2k-1}a_{2k}} = \overrightarrow{b_{2k-1}b_{2k}}. \tag{10}$$

Тогда для любого $p \in G$ справедливо равенство

$$S_{b_1}(S_{b_2}(...S_{b_{2k}}(p)...)) = p,$$

т.е. $p \in G$ самосовмещается относительно вершин многоугольника $< b_1, b_2, ..., b_{2k} >$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Равенства (8)–(10) ввиду определения 3 равносильны следующим равенствам:

$$[a_1a_2^{[-2]}\overset{2n-4}{a_2}\ b_2] = b_1, \tag{11}$$

$$[a_2a_3^{[-2]}\overset{2n-4}{a_3}\ b_3] = b_2, \tag{12}$$

$$[a_{2k-1}a_{2k}^{[-2]}\overset{2n-4}{a_{2k}}\ b_{2k}] = b_{2k-1}. \tag{13}$$

Рассмотрим выражение $S_{b_1}(S_{b_2}(...S_{b_{2k}}(p)...))$, которое в силу определения симметричных точек эквивалентно следующему:

$$S_{b_1}(S_{b_2}(...S_{b_{2k}}(p)...)) =$$

$$= [b_1(S_{b_2}(...S_{b_{2k}}(p)...))^{[-2]}\underbrace{(S_{b_2}(...S_{b_{2k}}(p)...))...}_{2n-4}b_1] = \dots =$$

$$= [b_1b_2^{[-2]}\overset{2n-4}{b_2}\ b_3b_4^{[-2]}\overset{2n-4}{b_4}\ b_5b_6^{[-2]}\overset{2n-4}{b_6}\dots$$

$$...b_{2k-1}b_{2k}^{[-2]}\overset{2n-4}{b_{2k}}\ pb_{2k}^{[-2]}\overset{2n-4}{b_{2k}}\ b_{2k-1}...$$

$$...b_6^{[-2]}\overset{2n-4}{b_6}\ b_5b_4^{[-2]}\overset{2n-4}{b_4}\ b_3b_2^{[-2]}\overset{2n-4}{b_2}\ b_1]. \tag{14}$$

Подставляя в (7) значения b_t из равенств (11)–(13), где t=1,3,5…2k-1, получим

$$[[a_1a_2^{[-2]}\overset{2n-4}{a_2}\ b_2]b_2^{[-2]}\overset{2n-4}{b_2}\ [a_3a_4^{[-2]}\overset{2n-4}{a_4}\ b_4]$$

$$b_4^{[-2]}\overset{2n-4}{b_4}\ [a_5a_6^{[-2]}\overset{2n-4}{a_6}\ b_6]b_6^{[-2]}\overset{2n-4}{b_6}\ ...$$

$$\dots b_{2k-1}b_{2k}^{[-2]}\overset{2n-4}{b_{2k}}\ pb_{2k}^{[-2]}\overset{2n-4}{b_{2k}}\ b_{2k-1}...b_6^{[-2]}\overset{2n-4}{b_6}$$

$$[a_5a_6^{[-2]}\overset{2n-4}{a_6}\ b_6]b_4^{[-2]}\overset{2n-4}{b_4}\ [a_3a_4^{[-2]}\overset{2n-4}{a_4}\ b_4]$$

$$b_2^{[-2]}\overset{2n-4}{b_2}\ [a_1a_2^{[-2]}\overset{2n-4}{a_2}\ b_2]]. \tag{15}$$

Применим свойство полуабелевости G к равенству (15). С учетом нейтральности последовательностей получим

$$[[a_1a_2^{[-2]}\overset{2n-4}{a_2}\ b_2]b_2^{[-2]}\overset{2n-4}{b_2}\ [a_3a_4^{[-2]}\overset{2n-4}{a_4}\ b_4]$$

$$b_4^{[-2]}\overset{2n-4}{b_4}\ [a_5a_6^{[-2]}\overset{2n-4}{a_6}\ b_6]b_6^{[-2]}\overset{2n-4}{b_6}\ ...$$

$$\dots b_{2k}^{[-2]}\overset{2n-4}{b_{2k}}\ pb_{2k}^{[-2]}\overset{2n-4}{b_{2k}}\ ...b_6^{[-2]}\overset{2n-4}{b_6}\ [a_5a_6^{[-2]}\overset{2n-4}{a_6}\ b_6]$$

$$b_4^{[-2]}\overset{2n-4}{b_4}\ [a_3a_4^{[-2]}\overset{2n-4}{a_4}\ b_4]$$

$$b_2^{[-2]}\overset{2n-4}{b_2}\ [a_1a_2^{[-2]}\overset{2n-4}{a_2}\ b_2]] =$$

$$= [a_1a_2^{[-2]}\overset{2n-4}{a_2}\ [b_2b_2^{[-2]}\overset{2n-4}{b_2}\ a_3]a_4^{[-2]}\overset{2n-4}{a_4}$$

$$[b_4b_4^{[-2]}\overset{2n-4}{b_4}\ a_5]a_6^{[-2]}\overset{2n-4}{a_6}\ [b_6b_6^{[-2]}\overset{2n-4}{b_6}\ ...$$

$$\dots b_{2k}^{[-2]}\overset{2n-4}{b_{2k}}\ pb_{2k}^{[-2]}\overset{2n-4}{b_{2k}}\ ...b_6^{[-2]}\overset{2n-4}{b_6}$$

$$[a_5a_6^{[-2]}\overset{2n-4}{a_6}\ b_6]b_4^{[-2]}\overset{2n-4}{b_4}\ [a_3a_4^{[-2]}\overset{2n-4}{a_4}\ b_4]$$

$$b_2^{[-2]}\overset{2n-4}{b_2}\ [a_1a_2^{[-2]}\overset{2n-4}{a_2}\ b_2]] =$$

$$= [a_1a_2^{[-2]}\overset{2n-4}{a_2}\ a_3a_4^{[-2]}\overset{2n-4}{a_4}\ a_5a_6^{[-2]}\overset{2n-4}{a_6}\ ...a_{2k}^{[-2]}\overset{2n-4}{a_{2k}}\ pb_{2k}^{[-2]}\overset{2n-4}{b_{2k}}\ ...$$

$$...b_6^{[-2]}\overset{2n-4}{b_6}\ [a_5a_6^{[-2]}\overset{2n-4}{a_6}\ b_6]b_4^{[-2]}\overset{2n-4}{b_4}\ [a_3a_4^{[-2]}\overset{2n-4}{a_4}\ b_4]$$

$$b_2^{[-2]}\overset{2n-4}{b_2}\ [a_1a_2^{[-2]}\overset{2n-4}{a_2}\ b_2]] =$$

$$= [a_1a_2^{[-2]}\overset{2n-4}{a_2}\ a_3a_4^{[-2]}\overset{2n-4}{a_4}\ a_5a_6^{[-2]}\overset{2n-4}{a_6}\ ...a_{2k}^{[-2]}\overset{2n-4}{a_{2k}}\ pb_{2k}^{[-2]}\overset{2n-4}{b_{2k}}\ ...$$

$$...b_6^{[-2]}\overset{2n-4}{b_6}\ [b_6a_6^{[-2]}\overset{2n-4}{a_6}\ a_5]b_4^{[-2]}\overset{2n-4}{b_4}\ [b_4a_4^{[-2]}\overset{2n-4}{a_4}\ a_3]$$

$$b_2^{[-2]}\overset{2n-4}{b_2}\ [b_2a_2^{[-2]}\overset{2n-4}{a_2}\ a_1]] =$$

$$= [a_1a_2^{[-2]}\overset{2n-4}{a_2}\ a_3a_4^{[-2]}\overset{2n-4}{a_4}\ a_5a_6^{[-2]}\overset{2n-4}{a_6}\ ...a_{2k}^{[-2]}\overset{2n-4}{a_{2k}}\ pb_{2k}^{[-2]}\overset{2n-4}{b_{2k}}\ ...$$

$$...b_6^{[-2]}\overset{2n-4}{b_6}\ b_6]a_6^{[-2]}\overset{2n-4}{a_6}\ [a_5b_4^{[-2]}\overset{2n-4}{b_4}\ b_4]$$

$$a_4^{[-2]}\overset{2n-4}{a_4}\ [a_3b_2^{[-2]}\overset{2n-4}{b_2}\ b_2]a_2^{[-2]}\overset{2n-4}{a_2}\ a_1] =$$

$$= [a_1a_2^{[-2]}\overset{2n-4}{a_2}\ a_3a_4^{[-2]}\overset{2n-4}{a_4}\ a_5a_6^{[-2]}\overset{2n-4}{a_6}\ ...a_{2k}^{[-2]}\overset{2n-4}{a_{2k}}\ p$$

Репозиторий ВГУ

$$a_{2k}^{[-2]}\overset{2n-4}{a_{2k}}\ldots a_6^{[-2]}\overset{2n-4}{a_6}\,a_5a_4^{[-2]}\overset{2n-4}{a_4}\,a_3a_2^{[-2]}\overset{2n-4}{a_2}\,a_1] \qquad (16)$$

Так как произвольная точка p □ G самосовмещается относительно вершин многоугольника $< a_1, a_2, \ldots, a_{2k} >$, то (16) перепишется в виде

$$[a_1a_2^{[-2]}\overset{2n-4}{a_2}\,a_3a_4^{[-2]}\overset{2n-4}{a_4}\,a_5a_6^{[-2]}\overset{2n-4}{a_6}\ldots a_{2k}^{[-2]}\overset{2n-4}{a_{2k}}\,pa_{2k}^{[-2]}\overset{2n-4}{a_{2k}}\ldots$$

$$\ldots a_6^{[-2]}\overset{2n-4}{a_6}\,a_5a_4^{[-2]}\overset{2n-4}{a_4}\,a_3a_2^{[-2]}\overset{2n-4}{a_2}\,a_1] = p\,.$$

Следовательно, справедливо равенство

$$[b_1b_2^{[-2]}\overset{2n-4}{b_2}\,b_3b_4^{[-2]}\overset{2n-4}{b_4}\ldots b_{2k}^{[-2]}\overset{2n-4}{b_{2k}}\,pb_{2k}^{[-2]}\overset{2n-4}{b_{2k}}\ldots$$

$$\ldots b_4^{[-2]}\overset{2n-4}{b_4}\,b_3b_2^{[-2]}\overset{2n-4}{b_2}\,b_1] = p\,,$$

которое эквивалентно

$$S_{b_1}(S_{b_2}(\ldots S_{b_{2k}}(p)\ldots)) = p\,,$$

т.е. $p \in G$ самосовмещается относительно вершин многоугольника $< b_1, b_2, \ldots, b_{2k} >$. Теорема доказана.

Заключение. Получены новые связи между последовательностями параллелограммов *n*-арных групп, установлены новые свойства самосовмещения точек относительно вершин многоугольников с четным количеством вершин.

ЛИТЕРАТУРА

1. Молодший, В.Н. Очерки по философским вопросам математики / В.Н. Молодший. – М.: Просвещение, 1969. – 304 с.
2. Golay, M.J.E. Notes on Digital Coding / M.J.E. Golay // Proc. IRE. – 1949. – Vol. 37, № 6. – P. 657.
3. Grzymala-Busse, J.W. Automorphisms of Polyadic Automata / J.W. Grzymala-Busse // J. Assoc. Computing Machinery. – 1969. – Vol. 16, № 2. – P. 208–219.
4. Русаков, С.А. Некоторые приложения теории *n*-арных групп / С.А. Русаков. – Минск: Беларуская навука, 1998. – 167 с.
5. Vakarelov, D. Ternary groups / D. Vakarelov // God. Sofij. Univ., Mat. Fak. – 1966–1968. – Vol. 61. – P. 71–105.
6. Кулаженко, Ю.И. Полиадические операции и их приложения / Ю.И. Кулаженко. – Минск: Изд. центр БГУ, 2014. – 311 с.
7. Кирилюк, Д.И. Исследование последовательностей параллелограммов *n*-арных групп / Д.И. Кирилюк // Изв. Гомельск. ун-та. – 2015. – № 3(90). – С. 118–123.

REFERENCES

1. Molodshiy V.N. *Ocherki po filosofskim voprosam matematiki* [Stories on Philosophical Issues of Mathematics], Moskva, Prosvesh-cheniye, 1969, 304 p.
2. Golay, M.J.E. Notes on Digital Coding / M.J.E. Golay // Proc. IRE. – 1949. – Vol. 37. – № 6. – P. 657.
3. Grzymala-Busse, J.W. Automorphisms of Polyadic Automata / J.W. Grzymala-Busse // J. Assoc. Computing Machinery. – 1969. – Vol. 16. – № 2. – P. 208–219.
4. Rusakov S.A. *Nekotoriye prilozheniya teorii n-arnikh grupp* [Some Appendices to the Theory of n-ary Groups], Minsk, Belaruskaya navuka, 1998, 167 p.
5. Vakarelov, D. Ternary groups / D. Vakarelov // God. Sofij. Univ., Mat. Fak. – 1966–1968. – Vol. 61. – P. 71–105.
6. Kulazhenko Yu.I. *Poliadicheskiye operatsii i ikh prilozheniya* [Poliadic Operations and their Appendices], Minsk, Izd, Tsentr BGU, 2014, 311 p.
7. Kiriliuk D.I. *Izvestiya Gomelskogo universiteta* [Newsletter of Gomel State University], 2015, 3(90), pp. 118–123.

Поступила в редакцию 17.12.2015

Адрес для корреспонденции: e-mail: kirilyuk.denis@g.mail.com – Кирилюк Д.И.

Репозиторий БГУ