Конечные разрешимые группы с малым нормальным рангом силовских подгрупп факторов

А.А. Трофимук

*Учреждение образования «Брестский государственный университет
имени А.С. Пушкина»*

Рассматриваются только конечные группы. Важным направлением теории групп является изучение групп, у которых некоторая система подгрупп обладает заданными свойствами. В статьях В.С. Монахова, А.А. Трофимука, Д.В. Грищука и др. в качестве определяющей системы подгрупп выбирались силовские подгруппы группы или ее факторов, а в качестве ключевого свойства – метациклическость, бициклическость или ограничение на порядок.

В.С. Монахов в 2002 году ввел понятие нормального ранга p -группы, кроме того им были исследованы разрешимые группы с силовскими подгруппами ограниченного нормального ранга.

Естественным образом возникает задача описания строения разрешимой группы, обладающей нормальным рядом, силовские подгруппы факторов которого имеют ограниченный нормальный ранг.

Цель статьи – получение оценок производной длины и нильпотентной длины разрешимой группы G , имеющей силовские подгруппы в факторах цепочки $\Phi(G) = G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_{m-1} \subset G_m = F(G)$ нормального ранга ≤ 2 .

Материал и методы. *В данной работе используются методы доказательства абстрактной теории групп.*

Результаты и их обсуждение. *Одним из первых результатов в этом направлении является результат Ф. Холла и Г. Хигмена, которые установили, что производная длина разрешимой группы с абелевыми силовскими подгруппами не превышает числа простых делителей порядка группы. Инварианты разрешимых групп с бициклическими силовскими подгруппами получены в исследовании В.С. Монахова и Е.Е. Грибовской. А.А. Трофимук показал, что для оценки производной длины разрешимой группы достаточно рассматривать порядки силовских подгрупп только ее подгруппы Фиттинга. Нахождение инвариантов разрешимых групп с заданными свойствами силовских подгрупп нашло развитие в исследовании строения групп по свойствам силовских подгрупп в факторах их нормальных рядов. Так, в работе В.С. Монахова и А.А. Трофимука получены оценки инвариантов разрешимой группы, обладающей нормальным рядом, силовские подгруппы в факторах которого являются бициклическими.*

Заключение. *Исследованы оценки производной длины и нильпотентной длины разрешимой группы G , у которой силовские подгруппы в факторах цепочки $\Phi(G) = G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_{m-1} \subset G_m = F(G)$ имеют нормальный ранг ≤ 2 . Здесь $\Phi(G)$ – подгруппа Фраттини группы G , а $F(G)$ – подгруппа Фиттинга группы G . В частности, производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 5, а нильпотентная длина группы G не превышает 4.*

Полученные результаты являются новыми и позволяют использовать данную работу для дальнейшего исследования конечных групп с ограничениями на силовские подгруппы ее факторов.

Ключевые слова: *разрешимая группа, нормальный ранг, подгруппа Фраттини, подгруппа Фиттинга, производная длина, нильпотентная длина.*

Finite Groups with Small Normal Rank of Sylow Subgroups of Factors

A.A. Trofimuk

Educational Establishment «Brest State A.S. Pushkin University»

We consider only finite groups. An important area of group theory is the study of groups that have a system of subgroups with given properties. In articles of V.S. Monakhov, A.A. Trofimuk, D.V. Gritsuk Sylow subgroups of groups or its factors are the defining system of subgroups; metacyclic, bicyclic or restriction on the order are the fixed properties.

V.S. Monakhov in 2002 introduced the concept of the normal rank of p -group and investigated the structure of solvable groups with Sylow subgroups of fixed normal rank.

Naturally there is the problem of describing the structure of solvable groups with normal series in which Sylow subgroups of factors have fixed normal rank.

The purpose of the article is to obtain the estimations of the derived length and the nilpotent length of solvable group G in which the normal rank of Sylow subgroups of the factors chain $\Phi(G) = G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_{m-1} \subset G_m = F(G)$ is at most 2.

Material and methods. *In this paper we used the methods of abstract group theory.*

Findings and their discussion. *One of the first results in this direction is the result of P. Hall and G. Higman. They proved that the derived length of a solvable group with abelian Sylow subgroups does not exceed the number of different prime divisors of the order of such group. The invariants of the groups with bicyclic Sylow subgroups were found in work of V.S. Monakhov and E.E. Gribovskaya.*

A.A. Trofimuk noticed that, to estimate the derived length, it suffices to consider the orders of the Sylow subgroups only Fitting subgroup of a group. Finding of invariants of solvable groups with the set properties of Sylow subgroups has found development in researches of a structure of groups on properties of Sylow subgroups in factors of their normal series. The research of the solvable groups having a normal series whose factors have bicyclic Sylow subgroups, is spent by V.S. Monakhov and A.A. Trofimuk.

Conclusion. The estimations of the derived length and nilpotent length of solvable group G in which the normal rank of Sylow subgroups of the factors chain $\Phi(G) = G_0 < G_1 < \dots < G_{m-1} < G_m = F(G)$ is at most 2 are obtained. Here $\Phi(G)$ is the Frattini subgroup of G and $F(G)$ is the Fitting subgroup of G . In particular, the derived length of $G/\Phi(G)$ is at most 5 and the nilpotent length of G is at most 4.

The results are new and allow to use this work for further study of finite groups with restrictions on Sylow subgroups of its factors.

Key words: solvable group, normal rank, Frattini subgroup, Fitting subgroup, derived length, nilpotent length.

Рассматриваются только конечные группы. Все обозначения и используемые определения соответствуют [1] и [2]. Напомним, что бициклической называют группу, которая является произведением двух циклических подгрупп.

В.С. Монахов [3] ввел понятие нормального ранга p -группы P следующим образом:

$$r_n(P) = \max_{X \triangleleft P} \log_p |X/\Phi(X)|.$$

Здесь $\Phi(X)$ – подгруппа Фраттини группы X , а запись $X \triangleleft P$ означает, что X – нормальная подгруппа группы P .

Кроме того, им были исследованы разрешимые группы с силовскими подгруппами P нормального ранга $r_n(P) \leq 2$.

Очевидно, что p -группа P имеет нормальный ранг 1 тогда и только тогда, когда P циклическая. Из теоремы III.11.5 [2] следует, что нормальный ранг примарной бициклической группы нечетного порядка не превышает 2. Однако обратное неверно. Так, $r_n(S) = 2$ для экстраспециальной группы S порядка 27, но S не является бициклической. Кроме того, из леммы 3 следует, что всякая 2-группа нормального ранга ≤ 2 является бициклической. Однако существуют бициклические 2-группы, которые имеют нормальный ранг 3. Так, в статье Хупперта [4] построена бициклическая группа

$$G = \langle a, b, c \mid a^2 = b^8 = c^2 = 1, [a, b] = c, [b, c] = b^4, [a, c] = 1 \rangle,$$

у которой $r_n(G) = 3$.

Напомним, что производной (нильпотентной) длиной разрешимой группы G называется наименьшее число абелевых (нильпотентных) факторов среди всех нормальных рядов группы G .

В работе [5] получены оценки инвариантов (производной длины и nilpotent length) разрешимой группы, обладающей нормальным рядом, силовские подгруппы в факторах которого являются бициклическими.

Рассмотрим для группы G участок нормального ряда

$$\Phi(G) = G_0 < G_1 < \dots < G_{m-1} < G_m = F(G), G_i \triangleleft G. \quad (1)$$

Здесь $F(G)$ – подгруппа Фиттинга группы G .

Цель статьи – получение оценок производной длины и nilpotent length разрешимой группы G , имеющей силовские подгруппы в факторах цепочки

$$\Phi(G) = G_0 < G_1 < \dots < G_{m-1} < G_m = F(G)$$

нормального ранга ≤ 2 .

Материал и методы. В данной работе используются методы доказательства абстрактной теории групп.

Теорема. Пусть в разрешимой группе G существует цепочка подгрупп (1) такая, что $r_n(P) \leq 2$ для каждой силовской подгруппы P из факторов G_i/G_{i-1} , $i = 1, 2, \dots, m$. Тогда nilpotent length группы G не превышает 4, а производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 5.

Пример. Пусть S – экстраспециальная группа порядка 27. Произведение $G = [S]GL(2, 3)$ является разрешимой группой, у которой существует нормальный ряд вида (1), в котором нормальный ранг силовских подгрупп его факторов не превышает 2. Nilpotent length группы G равна 4, производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ равна 5. Значит, оценки, полученные в теореме, являются точными.

Вспомогательные результаты. Для доказательства основной теоремы нам потребуются следующие вспомогательные утверждения.

В монографии Хупперта [2] получено описание p -групп G , у которых каждая абелева нормальная подгруппа порождается не более, чем двумя элементами. Эти результаты отражены в леммах 1 и 2.

Лемма 1 ([2, теорема III.7.6]). Пусть G – p -группа и каждая абелева нормальная подгруппа циклическая. Тогда:

- 1) если $p > 2$, то G циклическая;
- 2) если $p = 2$, то P имеет нормальную циклическую подгруппу индекса 2.

Лемма 2 ([2, теорема III.12.4, замечание III.12.5], [6]). Пусть G – p -группа, $|G| = p^n$ и каждая абелева нормальная подгруппа порождается двумя элементами. Тогда G изоморфна одной из следующих групп:

I) если $p \geq 3$, то:

1) G метациклическая;

2) либо $G = A \times B$, где A – неабелева группа порядка p^3 и экспоненты p , а B – циклическая группа порядка p^{n-2} , либо $G = [A]B$, где $A = Z_p \times Z_{p^{n-2}}$ – абелева группа, а B – циклическая группа порядка p ;

3) $G = [A]B$, где A – абелева группа, $A = C_G(G')$, а B – циклическая группа порядка p ;

4) G – 3-группа максимального класса;

II) если $p = 2$, то:

1) G – группа кватернионов порядка 8;

2) G – центральное произведение двух подгрупп Q_8 и D_8 , где D_8 – диэдральная группа порядка 8;

3) G – специальная группа такая, что $|G/Z(G)| = 2^4$ и $|Z(G)| = 2^2$.

Лемма 3. Пусть P – 2-группа и $r_n(P) \leq 2$. Тогда P бициклическая.

Доказательство. Так как $r_n(P) \leq 2$, то каждая абелева нормальная подгруппа порождается не более, чем двумя элементами. Если каждая абелева нормальная подгруппа циклическая, то из леммы 1 следует, что группа P метациклическая, а значит, бициклическая. Для случая, когда число порождающих элементов каждой абелевой нормальной подгруппы равно двум, будем использовать лемму 2. Очевидно, что группа P из п. II_1 является бициклической. Группа P из п. II_2 имеет порядок 16 и номер 8 в библиотеке SmallGroups [7]. Кроме того эта группа является бициклической. Вычисления в компьютерной системе GAP показывают, что группа из п. II_3 имеет нормальный ранг, равный 4, поэтому исключается из рассмотрения. Таким образом, 2-группа P нормального ранга ≤ 2 является бициклической.

Лемма 4 ([8, лемма 12]). Пусть H – неприводимая разрешимая подгруппа группы $GL(2, p)$. Тогда нильпотентная длина подгруппы H не превышает 3, а производная длина подгруппы H не превышает 4.

Непосредственно из определения нормального ранга вытекает

Лемма 5. Пусть N – нормальная подгруппа p -группы P . Тогда $\log_p |N/\Phi(N)| \leq r_n(P)$.

Доказательство теоремы. Предположим, что G – группа наименьшего порядка, удовлетворяющая условиям теоремы, у которой нильпотентная длина больше 4, а производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ больше 5.

1. $\Phi(G) = 1$.

Предположим, что $\Phi(G) \neq 1$. Тогда

$$\Phi(G/\Phi(G)) = G_0/\Phi(G) <$$

$$< G_1/\Phi(G) < \dots < G_m/\Phi(G) = F(G/\Phi(G))$$

участок нормального ряда фактор-группы $G/\Phi(G)$. Очевидно, что $G_0 = \Phi(G)$, а по теореме III.4.2 [2] $G_m = F(G)$. Поэтому для произвольной подгруппы G_i , $i = \overline{0, m}$, верно, что $\Phi(G) \subseteq G_i \subseteq F(G)$. Поскольку

$$(G_{i+1}/\Phi(G))/(\Phi(G)/\Phi(G)) \cong G_{i+1}/G_i,$$

то $G/\Phi(G)$ удовлетворяет условию теоремы. Из предположения следует, что нильпотентная длина группы $G/\Phi(G)$ не превышает 4, а производная длина фактор-группы $(G/\Phi(G))/\Phi(G/\Phi(G))$ не превышает 5. Из п. 4 леммы 4.29 [1] следует, что нильпотентная длина группы G не превышает 4. Так как $(G/\Phi(G))/\Phi(G/\Phi(G)) \cong G/\Phi(G)$, то производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 5. Противоречие.

2. Участок ряда (1) от единичной подгруппы Фраттини до подгруппы Фиттинга можно уплотнить до главного ряда, факторы которого имеют порядки p или q^2 .

Пусть $\overline{N} = N/G_i$ содержится в подгруппе $\overline{G_{i+1}} = G_{i+1}/G_i \leq F(G)/G_i$ и является минимальной нормальной подгруппой фактор-группы $\overline{G} = G/G_i$. Так как $\overline{G}$ разрешима, то $\overline{N}$ – элементарная абелева p -подгруппа для некоторого простого $p \in \pi(G)$. Так как нормальный ранг силовой p -подгруппы $(\overline{G_{i+1}})_p$ группы $\overline{G_{i+1}}$ не превышает 2 и $\overline{N}$ содержится в $(\overline{G_{i+1}})_p$, то из леммы 5 следует, что $\overline{N}$ – группа порядка p или p^2 . Заменяя в (1) отрезок $G_i \leq G_{i+1}$ на $G_i \leq N \leq G_{i+1}$ и повторяя эту процедуру нужное число раз, в итоге уплотним участок ряда от единичной подгруппы Фраттини до подгруппы Фиттинга до искомого главного ряда.

3. По теореме III.4.5 [2] подгруппа Фиттинга $F = F(G)$ является прямым произведением

минимальных нормальных подгрупп F_i группы G , где $1 \leq i \leq k$. Поэтому по теореме I.4.5 [2] для каждого F_i фактор-группа $G/C_G(F_i)$ изоморфна неприводимой подгруппе группы автоморфизмов $Aut(F_i)$. По лемме I.9.6 [2] фактор-группа $G/\bigcap_{i=1}^k C_G(F_i)$ изоморфна подгруппе прямого произведения групп $G/C_G(F_i)$, $1 \leq i \leq k$. Так как в разрешимой группе с единичной подгруппой Фраттини подгруппа Фиттинга совпадает со своим централизатором, то

$$\bigcap_{i=1}^k C_G(F_i) = C_G(F) = F \text{ и } G/\bigcap_{i=1}^k C_G(F_i) = G/F.$$

Пусть F_i – элементарная абелева p_i -подгруппа. В силу теоремы Жордана–Гельдера [2, теорема I.11.7] любые два главных ряда группы изоморфны, поэтому порядок $|F_i|$ равен p_i либо p_i^2 , где p_i – простое число.

Таким образом, возможны следующие варианты: либо $Aut(F_i)$ изоморфна циклической группе порядка $p_i - 1$, либо $Aut(F_i)$ изоморфна группе $GL(2, p_i)$.

В первом случае фактор-группа $G/C_G(F_i)$ циклическая и ее производная длина равна 1.

Во втором случае фактор-группа $G/C_G(F_i)$ изоморфна неприводимой подгруппе полной линейной группы $GL(2, p_i)$ и по лемме 4 нильпотентная длина и производная длина фактор-группы $G/C_G(F_i)$ не превышают 3 и 4 соответственно.

Так как производная и нильпотентная длина прямого произведения разрешимых групп не превышает максимума производных и нильпотентных длин сомножителей соответственно, то нильпотентная длина фактор-группы G/F не превышает 3, а производная длина фактор-группы G/F не превышает 4.

Очевидно, что нильпотентная длина группы G не превышает 4. Поскольку $F/\Phi(G)$ – абелева фактор-группа и

$$(G/\Phi(G))/(\Phi(G)/\Phi(G)) \cong G/F,$$

то производная длина $G/\Phi(G)$ не превышает 5. Противоречие. Теорема доказана.

Заключение. Таким образом, в данной статье получены оценки инвариантов разрешимой группы G , у которой силовские подгруппы в факторах

цепочки $\Phi(G) = G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_{m-1} \subset G_m = F(G)$ имеют нормальный ранг ≤ 2 . В частности, производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 5, а нильпотентная длина группы G не превышает 4. Эти оценки являются точными, что подтверждено приведенным в работе примером. Результаты статьи могут быть использованы в дальнейших исследованиях конечных групп с заданными свойствами силовских подгрупп факторов.

Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (грант № Ф15PM-025).

ЛИТЕРАТУРА

1. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск: Вышэйшая школа, 2006.
2. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin–Heidelberg–New York, 1967.
3. Монахов, В.С. О разрешимых конечных группах с силовскими подгруппами малого ранга / В.С. Монахов // Докл. НАН Беларуси. – 2002. – Т. 46, № 2. – С. 25–28.
4. Huppert, B. Über das Produkt von paarweise vertauschbaren zyklischen Gruppen / B. Huppert // Math. Z. – 1953. – Vol. 58. – P. 243–264.
5. Monakhov, V.S. On a finite group having a normal series whose factors have bicyclic Sylow subgroups / V.S. Monakhov, A.A. Trofimuk // Communications in algebra. – 2011. – № 39(9). – P. 3178–3186.
6. Blackburn, N. Generalizations of certain elementary theorems on p -groups / N. Blackburn // Proc. London Math. Soc. – 1961. – Vol. 11. – P. 1–22.
7. GAP (Groups, Algorithms, and Programming), Version 4.7.6. – Mode of access: www.gap-system.org. – Date of access: 02.09.2015.
8. Монахов, В.С. О конечных разрешимых группах фиксированного ранга / В.С. Монахов, А.А. Трофимук // Сиб. матем. журн. – 2011. – Т. 52, № 5. – С. 1123–1137.

REFERENCES

1. Monakhov V.S. *Vvedeniye v teoriyu konechnikh grupp i ikh klassov* [Introduction to Theory of Finite Groups and their Classes], Minsk, Vysshaya Shkola, 2006.
2. Huppert, B. *Endliche Gruppen I* / B. Huppert // Berlin–Heidelberg–New York, 1967.
3. Monakhov V.S. *O razreshimikh konechnikh gruppakh s silovskimi podgruppami malogo ranga* [On soluble Finite Groups with Sylow Subgroups of Small Rank], Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus, 2002, 46(2), pp. 25–28.
4. Huppert, B. *Über das Produkt von paarweise vertauschbaren zyklischen Gruppen* / B. Huppert // Math. Z. – 1953. – Vol. 58. – P. 243–264.
5. Monakhov, V.S. On a finite group having a normal series whose factors have bicyclic Sylow subgroups / V.S. Monakhov, A.A. Trofimuk // Communications in algebra. – 2011. – № 39(9). – P. 3178–3186.
6. Blackburn, N. Generalizations of certain elementary theorems on p -groups / N. Blackburn // Proc. London Math. Soc. – 1961. – Vol. 11. – P. 1–22.
7. GAP (2014) Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.7.6. www.gap-system.org.
8. Monakhov V.S., Trofimuk A.A. *O konechnikh razreshimikh gruppakh fiksirovannogo ranga* [On finite soluble groups of fixed rank], Siberian Mathematical Journal, 2011, 52(5), pp. 1123–1137.

Поступила в редакцию 29.09.2015

Адрес для корреспонденции: e-mail: alexander.trofimuk@gmail.com – Трофимук А.А.