



УДК 512.542

Гипотеза Локетта для произведений классов Фиттинга конечных групп

Е.Н. Залесская

Учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»

В теории разрешимых групп важное место занимают исследования, связанные с построением структурной теории классов Фиттинга. Среди них центральное место отводится проблеме определения структуры класса Фиттинга, известной в теории классов групп под названием «гипотеза Локетта».

Цель работы – описание новых произведений классов Фиттинга, которые не являются классами Локетта и удовлетворяют гипотезе Локетта.

Материал и методы. Объект исследования – классы Фиттинга конечных групп. В работе используются методы теории классов Фиттинга, теории формаций, теории решеток.

Результаты и их обсуждение. В данной статье доказано, что если $F = X \cdot Y$, где X и Y – локальные классы Фиттинга, причем X является формацией, Y – насыщенная радикальная формация, $X \cap Y = (1)$, $X \not\subseteq S$, то F удовлетворяет гипотезе Локетта и не является классом Локетта.

Заключение. Исследование направлено на изучение структуры классов Фиттинга. Основным результатом этой работы является теорема 2.2, в которой гипотеза Локетта подтверждена для специальных случаев классов Фиттинга.

Ключевые слова: класс Фиттинга, класс Локетта, гипотеза Локетта, локальный класс Фиттинга, формация, радикальный гомоморф.

Lockett Hypothesis for Products of Fitting Classes of Finite Groups

E.N. Zalesskaya

Educational Establishment «Vitebsk State P.M. Masherov University»

In the theory of solvable groups a significant place is taken by studies which are connected with the construction of the structural theory of Fitting classes. Among them central place is given to the problem of identification of the structure of a Fitting class, which is known in the theory of classes as Lockett hypothesis.

The purpose of the work is description of new products of Fitting classes which are not Lockett classes and satisfy Lockett hypothesis.

Material and methods. The object of the research is Fitting classes of finite groups. Methods of the theory of Fitting classes, methods of the theory of formations, methods of the theory of grates are used in the work.

Findings and their discussion. In the paper it is proved that if $F = X \cdot Y$, where X and Y – local Fitting classes, while X is a formation, Y is a saturated radical formation, $X \cap Y = (1)$, $X \not\subseteq S$, then F satisfies Lockett hypothesis and is not a Lockett class. All the findings are new.

Conclusion. The work aims at studying the structure of Fitting classes. The main findings of the work are the 2.2 theorem, in which Lockett hypothesis is confirmed for special cases of Fitting classes.

Key words: Fitting class, Lockett class, Lockett hypothesis, local Fitting class, formation, radical homomorph.

Все рассматриваемые в работе группы конечны. Классическими объектами исследования в теории классов групп и ее приложениях являются разрешимые группы. Более полуторавековая история развития теории разрешимых групп связана с крупнейшими достижениями в этой области.

Со второй половины 1960-х годов важное место в теории разрешимых групп стали занимать исследования, связанные с классами Фиттинга. Напомним, что классом Фиттинга (или радикальным классом) называется класс групп, замкнутый относительно нормальных подгрупп и их произведений.

Впервые классы Фиттинга упоминаются Фишером в [1] в 1966 году. В статье Фишера, Гашюца, Хартли [2] впервые рассматриваются классы Фиттинга конечных групп. В [1] классы Фиттинга были введены двойственным образом к формациям, классам групп, замкнутым относительно фактор-групп и относительно подпрямого произведения. Двойственность заключалась в том, что определение классов Фиттинга вытекало из определения формаций заменой фактор-групп на нормальные подгруппы, т.е. классы Фиттинга замкнуты относительно нормальных подгрупп и прямого произведения нормальных χ -подгрупп. В силу двойственности формацию называют корадикальным классом (класс Фиттинга – радикальный класс). Двойственность наблюдается и в теории f -проекторов (формации) и f -инъекторов (классы Фиттинга).

Следует отметить, что сам термин «класс Фиттинга» возник исходя из долгосрочной программы структурного анализа конечных групп, предложенной в 1938 году Х. Фиттингом, в которой впервые систематически использовался нильпотентный радикал групп. В дальнейшем классы Фиттинга стали рассматриваться и как самостоятельные объекты изучения.

В 70-е годы XX века в теории разрешимых групп сформировался ряд проблем, связанных с построением структурной теории классов Фиттинга. Среди них центральное место занимала общая проблема определения структуры класса Фиттинга, известная в теории классов групп под названием «гипотеза Локетта». Ее возникновение обусловлено результатами Блессеноля–Гашюца [3] и Локетта [4], которые в терминах радикалов определили два обширных семейства классов Фиттинга: нормальные классы, а также классы, которые в дальнейшем стали называть классами Локетта.

Напомним, что нормальный класс Фиттинга – такой класс Фиттинга f , у которого в любой группе G ее f -радикал G_f является f -максимальной подгруппой G . Кроме того, каждому непустому классу Фиттинга f Локетт [4] сопоставляет класс f^* , который определяется как наименьший из классов Фиттинга, содержащий f , такой, что для всех групп G и H справедливо равенство $(G \times H)_{f^*} = G_{f^*} \times H_{f^*}$, и класс f_* – как пересечение всех таких классов Фиттинга χ , для которых $\chi^* = f^*$. Класс Фиттинга f называют классом Локетта [4], если $f = f^*$.

Пристальное внимание к изучению внутренней структуры таких классов и их взаимосвязи привело к следующей гипотезе.

Гипотеза (Локетт, 1974 [4]). Каждый ли класс Фиттинга f определяется как пересечение некоторого нормального класса Фиттинга и класса Локетта, порожденного f ?

Класс Фиттинга f , удовлетворяющий гипотезе Локетта, будем называть L -классом. Примечателен тот факт, что первоначально гипотеза Локетта была подтверждена для следующих отдельных случаев локального класса Фиттинга: наследственного (Брайс, Косси, 1975 [5]), классов вида χN , $\chi \mathcal{S}_{\pi} \mathcal{S}_{\pi'}$ (Бейдлеман, Хаук, 1979 [6]), классов вида $\chi (\bigcap_{p \in \pi} \mathcal{S}_{\pi} \mathcal{S}_{\pi'})$ (Дерк, Хоукс, 1992 [7]). Для произвольных локальных классов Фиттинга доказана справедливость гипотезы в разрешимом случае в 1988 году Н.Т. Воробьевым [8] и в произвольном случае в 1996 году Галледжи [9].

Для отдельных случаев частично локальных классов Фиттинга гипотеза Локетта была подтверждена Н.Т. Воробьевым, Н.Н. Воробьевым и Е.Н. Залесской в 2007 году [10], Е.Н. Залесской и Ж.П. Макаровой в 2012 году [11]. Вместе с тем Бергер и Косси [12] установили, что это предположение неверно для нелокальных классов Фиттинга.

Цель статьи – описание новых произведений классов Фиттинга, которые не являются классами Локетта и удовлетворяют гипотезе Локетта.

Материал и методы. Объект исследования – классы Фиттинга конечных групп. В работе используются методы теории классов Фиттинга, теории формаций, теории решеток.

1. Вспомогательные результаты

Теорема 1.1 [8]. Если f – некоторый класс Фиттинга и χ – насыщенный радикальный гомоморф, то $(f\chi)^* = f^*\chi$.

Теорема 1.2 [7]. Пусть χ и ψ – классы Фиттинга. Справедливы следующие утверждения:

- 1) если $\chi \subseteq \psi$, то $\chi^* \subseteq \psi^*$ и $\chi_* \subseteq \psi_*$;
- 2) $(\chi_*)_* = \chi_* = (\chi^*)_* \subseteq \chi \subseteq \chi^* = (\chi_*)^* = (\chi^*)^*$;
- 3) $f \subseteq f_* \mathcal{A}$;

4) если $\{f_i : i \in I\}$ – множество непустых классов Фиттинга, то $(\bigcap_{i \in I} f_i)^* = \bigcap_{i \in I} f_i^*$.

Теорема 1.3 [13]. Пусть χ и f – классы Фиттинга. Тогда верно равенство $(\chi_* \cap f_*)_* = (\chi \cap f)_*$.

Теорема 1.4 [7]. Справедливы следующие утверждения:

а) если X – класс Фиттинга и $\{Y_i \mid i \in I\}$ – множество классов Фиттинга, то имеет место равенство

$$\bigcap_{i \in I} (XY_i) = X \bigcap_{i \in I} Y_i;$$

б) если X – формация Фиттинга и $\{Y_i \mid i \in I\}$ – множество классов Фиттинга, то имеет место равенство

$$\bigcap_{i \in I} (Y_i X) = (\bigcap_{i \in I} Y_i) X.$$

Теорема 1.5 [8]. Произведение локальных классов Фиттинга является локальным классом Фиттинга.

Теорема 1.6 [8]. Любой локальный класс Фиттинга удовлетворяет гипотезе Локетта.

Теорема 1.7 [8]. Любой локальный класс Фиттинга является классом Локетта.

Теорема 1.8 [7]. Класс Фиттинга F удовлетворяет гипотезе Локетта тогда и только тогда, когда $F_* = F^* \cap S_*$.

2. Гипотеза Локетта для произведений классов Фиттинга, не являющихся классами Локетта

Сформулируем в классе S всех конечных разрешимых групп лемму, которая понадобится для доказательства основного результата.

Лемма 2.1 [11]. Пусть классы Фиттинга X и Y таковы, что X является L -классом, а Y – насыщенная радикальная формация. Тогда если класс X^*Y является L -классом, то и класс X_*Y является L -классом.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если класс Фиттинга X^*Y удовлетворяет гипотезе Локетта, то справедливо равенство $(X^*Y)_* = (X^*Y)^* \cap S_*$.

Так как Y – насыщенный радикальный гомоморф, то по теореме 1.1 $(X^*Y)^* = (X^*)^*Y$. Но по теореме 1.2 $(X^*)^* = X^*$. Следовательно, справедливо равенство

$$(X^*Y)_* = X^*Y \cap S_*. \quad (1)$$

Так как $(X^*Y)_* = ((X^*Y)^*)^*$, то $((X^*Y)^*)^* = ((X^*Y)^* \cap S_*)^*$.

Докажем, что $S_* = (S^*)^*$. Очевидно, что $S_* \subseteq S^*$. Значит, по теореме 1.2 $(S^*)^* = S_* \subseteq (S^*)^*$.

С другой стороны, так как Y – разрешимый класс Фиттинга и $S_* \subseteq S$, то $S^*Y \subseteq S$. Следовательно, $(S^*Y)^* \subseteq S^*$.

Поэтому

$$((X^*Y)^*)^* = ((X^*Y)^* \cap S_*)^* = ((X^*Y)^* \cap (S^*Y)^*)^*.$$

По теореме 1.3 имеем $((X^*Y)^* \cap (S^*Y)^*)^* = (X^*Y \cap S^*Y)^*$.

Ввиду того, что Y – формация Фиттинга, по теореме 1.4 получаем

$$X^*Y \cap S^*Y = (X^* \cap S^*)Y.$$

Итак,

$$(X^*Y)^* = ((X^* \cap S^*)Y)^*. \quad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что $((X^* \cap S^*)Y)^* = X^*Y \cap S^*$.

Ввиду того, что класс X удовлетворяет гипотезе Локетта в классе S , имеем $X_* = X^* \cap S_*$. Из этого следует, что $(X_*Y)^* = ((X^* \cap S_*)Y)^*$. Поэтому $(X_*Y)^* = X^*Y \cap S_*$.

Рассмотрим класс Фиттинга $(X_*Y)^*$. Так как Y – насыщенный радикальный гомоморф, то по теореме 1.1 $(X_*Y)^* = (X_*)^*Y$. Но $(X_*)^* = X^*$. Следовательно, $(X_*Y)^* = X^*Y$. Итак, получаем $(X_*Y)^* = (X_*Y)^* \cap S_*$.

Это означает, что класс Фиттинга X_*Y удовлетворяет гипотезе Локетта.

Лемма доказана.

Следующая теорема доказана в классе S всех конечных разрешимых групп.

Теорема 2.2. Пусть X и Y – локальные классы Фиттинга, причем X является формацией, Y – насыщенная радикальная формация, $X \cap Y = (1)$, $X \not\subseteq S_*$. Тогда $F = X_*Y$ удовлетворяет гипотезе Локетта и не является классом Локетта.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как X и Y – локальные классы Фиттинга, то по теореме 1.5 произведение XY является локальным классом Фиттинга. Следовательно, по теореме 1.6 класс XY является L -классом. Но по теореме 1.7 X – класс Локетта, следовательно, X^*Y является L -классом. Таким образом, по лемме 2.1, ввиду того, что X – L -класс, Y – насыщенная радикальная формация, X_*Y также является L -классом.

Остается показать, что класс F не является классом Локетта, т.е. $F \neq F^*$. Если предположить, что F – класс Локетта, то $X_*Y = (X_*Y)^*$.

Но тогда, учитывая, что Y – насыщенная радикальная формация и X – класс Локетта, по теоремам 1.1 и 1.2 имеем

$$(X_*Y)^* = (X_*)^*Y = X^*Y = XY,$$

и справедливо равенство $XY = X_*Y$.

Так как X является L -классом, то по теореме 1.8 $X_* = X \cap S_*$. Следовательно, $(X \cap S_*)Y = XY$.

Но тогда ввиду того, что Y – насыщенная радикальная формация, следует, что

$$(X \cap S_*)Y = XY \cap S^*Y.$$

Значит, $XY \cap S^*Y = XY$ и поэтому $XY \subseteq S^*Y$.

Очевидно, что $X \subseteq S^*Y$. Следовательно, справедливо включение

$$X \cap S_*X \subseteq S^*Y \cap S_*X.$$

Ясно, что $X \cap S_*X = X$ и

$$S^*Y \cap S_*X = S^*(Y \cap X) = [Y \cap X = (1)] = S_*.$$

Следовательно, $X \subseteq S_*$.

Последнее противоречит тому, что по условию теоремы $X \notin S_*$. Значит, наше предположение неверно и класс Фиттинга f не является классом Локетта.

Теорема доказана.

При $X = S_p$, мы получаем в качестве следствия результат Е.Н. Залесской, Ж.П. Макаровой [11].

Следствие 1 [11]. Пусть $f = (S_p) * Y$, где Y – локальный класс Фиттинга такой, что $S_p \cap Y = (1)$. Тогда f – L -класс, который не является классом Локетта.

При $X = S_p$, $Y = N_p$ мы получаем в качестве следствия результат Н.Т. Воробьева, Н.Н. Воробьева и Е.Н. Залесской [10].

Следствие 2 [10]. Пусть $f = (S_p) * N_p$, тогда f – L -класс, который не является классом Локетта.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fischer, B. Klassen konjugierter Untergruppen in endlichen auflösbaren Gruppen / B. Fischer. – Habilitationsschrift, Universität Frankfurt (M). – 1966.
2. Fischer, B. Injektoren endlicher auflösbarer Gruppen / B. Fischer, W. Gaschutz, B. Hartley // Math. Z. – 1967. – Bd. 102, № 5. – S. 337–339.
3. Blessohl, D. Über normal Schunk und Fittingklassen / D. Blessohl, W. Gaschutz // Math. Z. – 1970. – Bd. 148, № 1. – S. 1–8.
4. Lockett, P. The Fitting class F^* / P. Lockett. – Math. Z. – 1974. – Vol. 137, № 2. – P. 131–136.
5. Bryce, R.A. A problem in Theory of normal Fitting classes / R.A. Bryce, J. Cossey // Math. Z. – 1975. – Vol. 141, № 2. – P. 99–110.
6. Beidleman, J.C. Über fittingklassen und Lockett-Vermutung / J.C. Beidleman, P. Hauck // Math. Z. – 1979. – Bd. 167, № 2. – S. 161–167.
7. Doerk, K. Finite solvable groups / K. Doerk, T. Hawkes // Walter de Gruyter. – 1992. – New York–Berlin. – 891 p.
8. Воробьев, Н.Т. О радикальных классах конечных групп с условием Локетта / Н.Т. Воробьев // Матем. заметки. – 1988. – Т. 43, № 2. – С. 161–168.

9. Gallego, M.P. Fitting pairs from direct limits and the Lockett conjecture / M.P. Gallego // Comm. Algebra. – 1996. – Vol. 24, № 6. – P. 2011–2023.
10. Воробьев, Н.Т. О проблемах структуры классов Фиттинга / Н.Т. Воробьев, Е.Н. Залесская, Н.Н. Воробьев // Весн. Віцебск. дзярж. ун-та. – 2007. – № 2(44). – С. 105–108.
11. Залесская, Е.Н. О гипотезе Локетта для классов Фиттинга конечных групп / Е.Н. Залесская, Ж.П. Макарова // Весн. Віцебск. дзярж. ун-та. – 2012. – № 6(72). – С. 15–19.
12. Berger, T.R. An example in the theory of normal Fitting classes / T.R. Berger, J. Cossey // Math. Z. – 1977. – Bd. 154. – S. 287–293.
13. Залесская, Е.Н. О решетках частично локальных классов Фиттинга / Е.Н. Залесская, Н.Н. Воробьев // Сибирск. матем. журнал. – 2009. – Т. 50, № 6. – С. 1319–1327.

REFERENCES

1. Fischer, B. Klassen konjugierter Untergruppen in endlichen auflösbaren Gruppen / B. Fischer. – Habilitationsschrift, Universität Frankfurt (M). – 1966.
2. Fischer, B. Injektoren endlicher auflösbarer Gruppen / B. Fischer, W. Gaschutz, B. Hartley // Math. Z. – 1967. – Bd. 102, № 5. – S. 337–339.
3. Blessohl, D. Über normal Schunk und Fittingklassen / D. Blessohl, W. Gaschutz // Math. Z. – 1970. – Bd. 148, № 1. – S. 1–8.
4. Lockett, P. The Fitting class F^* / P. Lockett. – Math. Z. – 1974. – Vol. 137, № 2. – P. 131–136.
5. Bryce, R.A. A problem in Theory of normal Fitting classes / R.A. Bryce, J. Cossey // Math. Z. – 1975. – Vol. 141, № 2. – P. 99–110.
6. Beidleman, J.C. Über fittingklassen und Lockett-Vermutung / J.C. Beidleman, P. Hauck // Math. Z. – 1979. – Bd. 167, № 2. – S. 161–167.
7. Doerk, K. Finite solvable groups / K. Doerk, T. Hawkes // Walter de Gruyter. – 1992. – New York, Berlin. – 891 p.
8. Vorobyev N.T. *Matematicheskiye zametki* [Mathematical Notes], 1988, 43(2), pp. 161–168.
9. Gallego, M.P. Fitting pairs from direct limits and the Lockett conjecture / M.P. Gallego // Comm. Algebra. – 1996. – Vol. 24, № 6. – P. 2011–2023.
10. Vorobyev N.T., Zaleskaya E.N., Vorobyev N.N. *Vesnik VDU* [Newsletter of Vitebsk State University], 2007, 2(44), pp. 105–108.
11. Zaleskaya E.N., Makarova Zh.P. *Vesnik VDU* [Newsletter of Vitebsk State University], 2012, 6, pp. 15–19.
12. Berger, T.R. An example in the theory of normal Fitting classes / T.R. Berger, J. Cossey // Math. Z. – 1977. – Bd. 154. – S. 287–293.
13. Zaleskaya E.N., Vorobyev N.N. *Sibirski matematicheski zhurnal* [Siberian Mathematical Journal], 2009, 50(6), pp. 1319–1327.

Поступила в редакцию 10.12.2015

Адрес для корреспонденции: e-mail: alenushka0404@mail.ru – Залесская Е.Н.