УДК 539.3:531.2:616.21

М.А. Фирсов

О влиянии геометрических и физических параметров слухового протеза на собственные частоты колебаний реконструированной системы среднего уха

В работе рассматривается простейшая механико-математическая модель звукопроводящей колебательной системы среднего уха человека после его хирургической реконструкции [1–2]. Колебательная система состоит из круглой упругой пластинки и двух шарнирно-соединенных между собой стержней. Первый из стержней, жестко соединенный с пластиной, моделирует протезированную цепь косточек «молоточек-наковальня», а второй – стременную косточку [3–4]. Исследуется случай радиально-симметричных колебаний пластины, при которых стержень совершает поступательные движения вдоль оси.

Свободные радиально-симметричные колебания предварительно напряженной пластины описываются дифференциальным уравнением [5]

$$D\Delta^2 W(r,t) + T_1 \Delta W(r,t) + \rho \frac{\partial^2 W(r,t)}{\partial t^2} = 0 \qquad (1)$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{r},$$

где $W(r, t)$ – прогиб пластины, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона материала, из которого изготовлена пластина, T_1 – сила натяжения пластины, ρ – плотность материала пластины, h – толщина пластины.

В [5] рассматривался случай жесткого крепления пластины на внутреннем и внешнем контуре. В этой работе рассматривается случай упругой заделки на внешнем контуре. Тогда граничные условия имеют вид

$$k_{sl}W(r,t)\big|_{r=a}=Q_L\,,\ k_{st}\left.\frac{\partial W(r,t)}{\partial r}\right|_{r=a}=M_L\,;\ \left.\frac{\partial W(r,t)}{\partial r}\right|_{r=b}=0\,,\ W(r,t)\big|_{r=b}=U(t)\,,\quad (2)$$

где Q_L – перерезывающая сила в пластине, M_L – изгибающий момент в пластине, k_{st}, k_{sl} – постоянные коэффициенты, определяющие жесткость внешнего контура на нормальное перемещение и поворот, соответственно [6].

Перерезывающая сила и изгибающий момент в пластине находятся по формулам

$$Q_L=-D\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 W}{\partial\varphi^2}\right),\ M_L=D\left[\frac{\partial^2 W}{\partial r^2}+\nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 W}{\partial\varphi^2}\right)\right].\quad (3)$$

В случае жесткого крепления внутреннего контура уравнение движения присоединенного к пластине стержня запишется в виде [5]

$$2\pi bD\frac{\partial}{\partial r}\Delta W(r,t)\bigg|_{r=b}+\mu U(t)+m\frac{\partial^2 U(t)}{\partial t^2}=0\,,\quad (4)$$

$$m=m_p+m_s\,,$$

где m_p – масса стержня, m_s – масса стремени, $U(t)$ – смещение стержня, μ – коэффициент, определяющий меру взаимодействия внутреннего уха и основания стремени, $\mu=27{,}8\cdot10^3\cdot c_{ref}$ [7].

Решения уравнений (1), (4) будем искать в виде

$$U(t)=ue^{i\omega t}\,,\qquad W(r,t)=w(r)e^{i\omega t}\,,\quad (5)$$

где ω – искомая действительная частота.

Подстановка (5) в (1) и (4) приводит к системе дифференциальных уравнений

$$\Delta^2 w(r)+T_1\Delta w(r)-k^2 w(r)=0\,,\quad (6)$$

$$2\pi b\left[L_0 w(r)\right]_{r=b}+\mu_1 u-m_1 u=0\,,\quad (7)$$

$$T_1=\frac{T}{D},\ \mu_1=\frac{\mu}{D},\ k^2=\frac{\omega^2\rho}{D},\ m_1=\frac{\omega^2 m}{D},\ L_0=\frac{\partial^3}{\partial r^3}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}.$$

Тогда решение уравнения (6) с учетом граничных условий (2) имеет вид

$$w(r)=\frac{u}{|M|}\left[\overline{M}_{31}J_0(\xi r)+\overline{M}_{32}Y_0(\xi r)+\overline{M}_{33}I_0(\varsigma r)+\overline{M}_{34}K_0(\varsigma r)\right],\quad (8)$$

где $\xi=\sqrt{\dfrac{T+\sqrt{T^2+4k^2}}{2}}$, $\varsigma=\sqrt{-\dfrac{T-\sqrt{T^2+4k^2}}{2}}$, а элементы матрицы **M** имеют вид:

$$M_{11}=DJ_0'''(\xi a)+\frac{D}{a}J_0''(\xi a)-\frac{D}{a^2}J_0'(\xi a)-k_{sl}J_0(\xi a)\,,$$

$$M_{12}=DY_0'''(\xi a)+\frac{D}{a}Y_0''(\xi a)-\frac{D}{a^2}Y_0'(\xi a)-k_{sl}Y_0(\xi a)\,,$$

$$M_{13}=D''' I_0(\varsigma a)+\frac{D}{a}I_0''(\varsigma a)-\frac{D}{a^2}I_0'(\varsigma a)-k_{sl}I_0(\varsigma a)\,,$$

$$M_{14}=DK_0'''(\varsigma a)+\frac{D}{a}K_0''(\varsigma a)-\frac{D}{a^2}K_0'(\varsigma a)-k_{sl}K_0(\varsigma a)\,,$$

$$M_{21} = DJ_0''(\xi a) + \left(\frac{D\rho}{a} - k_{st}\right)J_0'(\xi a), \qquad M_{22} = DY_0''(\xi a) + \left(\frac{D\rho}{a} - k_{st}\right)Y_0'(\xi a),$$

$$M_{23} = DI_0''(\varsigma a) + \left(\frac{D\rho}{a} - k_{st}\right)I_0'(\varsigma a), \qquad M_{24} = DK_0''(\varsigma a) + \left(\frac{D\rho}{a} - k_{st}\right)K_0'(\varsigma a),$$

$$M_{31} = J_0(\xi a), \quad M_{32} = Y_0(\xi a), \quad M_{33} = I_0(\varsigma a), \quad M_{34} = K_0(\varsigma a),$$

$$M_{41} = J_0'(\xi a), \quad M_{42} = Y_0'(\xi a), \quad M_{43} = I_0'(\varsigma a), \quad M_{44} = K_0'(\varsigma a).$$

Здесь $J_0(x)$, $Y_0(x)$ – функции Бесселя первого и второго рода нулевого порядка, а $J_0(x)=I_0(i\cdot x)$, $Y_0(x)=K_0(i\cdot x)$ и $\overline{M}_{3j}, j = 1..4$ – соответствующие миноры матрицы **M**.

Подставив решение (8) в уравнение (7), получим трансцендентное уравнение относительно искомой частоты ω^2 в случае упругой заделки пластины на внешнем контуре

$$\frac{2\pi b}{|M|}\left[L_0\left\{\overline{M}_{31}J_0(\xi r) - \overline{M}_{32}Y_0(\xi r) + \overline{M}_{33}I_0(\varsigma r) - \overline{M}_{34}K_0(\varsigma r)\right\}\right]_{r=b} + \mu_1 - m_1 = 0. \qquad (9)$$

С использованием программы Maple находится решение уравнения (9) при различных физических и геометрических параметрах системы. А именно, исследуется влияние массы протеза, силы натяжения пластины, цилиндрической жесткости пластины, коэффициента, определяющего меру воздействия внутреннего уха на систему, влияние коэффициентов k_{st}, k_{sl} на собственные частоты колебания системы. Конкретные значения шести первых собственных частот радиально-симметричных колебаний при изменении различных параметров приведены в таблицах 1–5.

Таблица 1

Зависимость собственных частот ω_i (Гц) от массы протеза

m_p, 10^{-6} кг	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
5 (plastic)	176,476	396,56	825,27	1485,27	2360,15	3445,01
9 (dentine)	176,470	396,52	825,19	1485,13	2359,94	3444,70
35 (bioceramic)	176,436	396,25	824,64	1484,22	2358,54	3442,69
40 (hycloro-xybapatite)	176,430	396,20	824,53	1484,04	2358,27	3442,31
42 (gold)	176,427	396,18	824,49	1483,97	2358,16	3442,16

В таблице 1 представлены значения собственных частот колебаний системы «протез – стремя» при значениях a=5·10^{-3} м, b=2·10^{-3} м, m_s=3,5·10^{-6} кг, h=1,5·10^{-4} м, E=3,2·10^{7} Н·$м^{-2}$, ρ=1,2·10^3 кг/$м^3$, c_{ref}=0,035, ν=0,4, T=0 Н/м, k_{st}=10^{10}, k_{sl}=10^{10} в зависимости от массы протеза. Как и следовало ожидать, при увеличении массы протеза значение всех собственных частот уменьшается, но влияние массы не столь значительно.

В таблице 2 приведены значения собственных частот колебания системы при значениях a = 5·10^{-3} м, b = 2·10^{-3} м, m_s = 3,5·10^{-6} кг, m_p = 40·10^{-6} кг, h=1,5·10^{-4} м, E=3,2·10^7 Н·$м^{-2}$, ρ=1,2·10^3 кг/$м^3$, c_{ref}=0,035, ν=0,4, k_{st}=10^{10}, k_{sl}=10^{10}. Анализ таблицы показывает, что собственная частота колебаний системы реагирует на изменение силы натяжения мембраны незначительно, причем при увеличении силы натяжения значения всех собственных частот изменяются в большую сторону пропорционально увеличению силы натяжения пластины.

Таблица 2

Зависимость собственных частот ω_i (Гц) от силы натяжения пластины

T, Н/м	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
0	176,430	396,201	824,530	1484,040	2358,270	3442,309
10^{-3}	176,431	396,204	824,534	1484,044	2358,274	3442,313
10^{-1}	176,565	396,494	824,906	1484,440	2358,680	3442,725
1	177,773	399,119	828,280	1488,028	2362,363	3446,462
2	179,097	402,017	832,012	1492,006	2366,448	3450,609
3	180,403	404,896	835,727	1495,973	2370,526	3454,751
4	181,691	407,756	839,426	1499,929	2374,597	3458,889

Таблица 3

Зависимость собственных частот ω_i (Гц) от модуля Юнга

E, Н/м^2	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
$1 \cdot 10^7$	118,912	279,656	500,549	850,038	1330,354	1932,261
$3 \cdot 10^7$	173,371	387,734	800,303	1437,916	2283,991	3333,408
$5 \cdot 10^7$	196,726	465,514	1017,357	1848,182	2943,656	4300,070
$7 \cdot 10^7$	211,460	532,504	1196,022	2182,753	3480,496	5086,228
$9 \cdot 10^7$	222,673	592,315	1651,387	2472,488	3944,956	5766,187

Из таблицы 3 следует, что жесткость пластины оказывает наибольшее влияние на собственные частоты по сравнению с остальными изменяемыми параметрами; при увеличении цилиндрической жесткости пластины все собственные частоты увеличиваются.

Таблица 4

Зависимость собственных частот ω_i (Гц) от коэффициента c_{ref}

c_{ref}	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
0,035	176,430	396,201	824,530	1484,040	2358,270	3442,309
0,040	181,806	405,230	828,736	1486,260	2359,612	3443,209
0,045	186,340	413,961	833,277	1488,503	2360,961	3444,113
0,050	190,204	422,369	837,735	1490,768	2362,319	3445,019

Таблица 5

Зависимость собственных частот ω_i (Гц) от коэффициента k_{si}

k_{si}	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
10^{10}	176	396	825	1484	2358	3442
10^5	163	310	537	994	1695	2616
10^4	94	224	480	966	1679	2606
10^3	55	216	476	963	1677	2605

В таблице 4 приведены значения собственных частот колебания системы в зависимости от коэффициента c_{ref} [7], определяющего меру взаимодействия внутреннего уха и основания стремени. При увеличении этого коэффициента увеличиваются и значения всех собственных частот колебаний системы. И, наконец, таблица 5 показывает, что при уменьшении коэффициента k_{si} значения собственных частот колебаний уменьшается, причем при большом увеличении коэффициента, определяющего жесткость внешнего контура, все частоты колебаний стремятся к значениям собственных частот, найденных в [5] для случая жесткого крепления пластины на внешнем контуре.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Михасев Г.И., Коршиков П.Ф., Ситников В.П.*** К вопросу о возможности математического моделирования реконструированного среднего уха. Материалы VIII Математической Белорусской конференции. – М., 2000. – С. 145–146.
2. ***Ситников В.П., Михасев Г.И.*** Возможности математического моделирования среднего уха человека. Сборник докладов научно-практической конференции «Проблемы научно-инновационного развития Витебской области и пути их решения». – М., 1999. – С. 245–247.
3. ***Huttenbrink K.-B.*** Mechanical aspects of middle ear reconstruction // Middle Ear Mechanics in Research and Otosurgery (ed. by K.-B. Huttenbrink). – Dresden: Dept. of Oto-Rhino-Laringology, Univ. of Technology. – 1997. – P. 165–168.
4. ***Jahnke K., Leieberum B., Kuhn W.*** Missing handle of malleus: reinforcement of the tympanic membrane // Middle Ear Mechanics in Research and Otosurgery (ed. by K-B. Huttenbrink). – Dresden: Dept. of Oto-Rhino-Laringology, Univ. of Technology. – 1997. – P. 197–199.
5. ***Коршиков П.Ф., Михасев Г.И.*** Свободные радиально-симметричные колебания вязкоупругой кольцевой пластины, сопряженной со стержнем // Веснік ВДУ, 2001, № 5 (30). – С. 103–106.
6. ***Wada H., Koite T., Kobayashi T.*** Three-Dimentional Finite-Element Method (FEM) Analysis of the Human Middle Ear // Middle Ear Mechanics in Research and Otosurgery (ed. by K.-B. Huttenbrink). – Dresden: Dept. of Oto-Rhino-Laringology, Univ. of Technology. – 1997. – P. 76–81.
7. ***Beer H.-J., Bornitz M., Hardke H.-J., Schmidt R., Hofman G., Vogel U., Zahnert T., Huttenbrink K.-B.*** Modeling of Components of the Human Middle Ear and Simulation of Their Dynamic Behavior // Audiol Neurootol. – 1994, Vol. 4. – P. 156–162.

S U M M A R Y

Free radial-symmetric vibrations of the reconstructed system of the human middle ear are investigated. This approximate model consists of an elastic plate and two rods. The transcendental equation for determination of frequencies of the reconstructed system of the middle ear has been obtained. Influence of low frequencies upon various geometric and physical parameters of the model is analyzed.

Поступила в редакцию 16.09.2004