УДК 537.8:517.951

И.Е. Андрушкевич, В.А. Жизневский, Ю.В. Шиенок

О классификации сред с точки зрения разделимости уравнений Максвелла

Актуальность исследования распространения электромагнитных волн в неоднородных и нелинейных средах не вызывает сомнений. Изучение распространения электромагнитных волн в различных средах замыкается на проблему поиска решений уравнений Максвелла. На первом этапе решения уравнений электромагнитного поля обычно их приводят к векторным волновым уравнениям, которые затем записывают по компонентам. Эту процедуру называют разделением уравнений Максвелла. Уравнения, получающиеся при этом, содержат наряду с пространственными производными второго порядка также вторые производные по времени [1]. Для линейных однородных сред задача построения волновых уравнений давно решена [1–4] и не представляет особых затруднений. Корректное формирование волновых уравнений в неоднородных и в нелинейных средах представляет далеко нетривиальную проблему. Будем рассматривать уравнения Максвелла в виде:

$$\begin{aligned} & rot\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} + \vec{J}^{cm}, \\ & rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ & div\vec{D} - \rho + \rho^{cm}, \\ & div\vec{B} = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Для полноты с математической и физической точек зрения эта система традиционно дополняется с помощью материальных уравнений, учитывающих влияние среды на протекающие в ней электромагнитные явления:

$$\vec{D} = \vec{D}(\vec{E}), \vec{B} = \vec{B}(\vec{H}), \vec{J} = \vec{J}(\vec{E}).$$

В линейных изотропных средах без дисперсии с пространственно-временными изменениями параметров векторы индукции электрического $\vec{D}$, магнитного $\vec{B}$ полей и плотность тока $\vec{J}$ связаны с векторами электромагнитного поля $\vec{E}$ и $\vec{H}$ следующими материальными уравнениями:

$$\begin{aligned} & \vec{D} = \varepsilon\vec{E}, \\ & \vec{B} = \mu\vec{H}, \\ & \vec{J} = \sigma\vec{E}, \end{aligned} \tag{2}$$

где параметры ε и μ – абсолютные диэлектрическая и магнитная проницаемости, σ – проводимость среды являются заданными функциями пространственных координат и времени.

$$\varepsilon = \varepsilon(\vec{r}, t),$$
$$\mu = \mu(\vec{r}, t),$$
$$\sigma = \sigma(\vec{r}, t).$$

Здесь $\vec{r}$ – это вектор пространственных координат рассматриваемой точки в заданной системе координат.

Линейность связей (2) обеспечивает преобразование уравнений Максвелла в систему линейных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами, зависящими как от координат, так и от времени [2, 3]. Используя тождества для дифференциальных операций несложными преобразованиями можно получить следующие уравнения, имеющие смысл волновых:

$$\begin{aligned} &\Delta\vec{H} + grad\left(\frac{1}{\mu}\left(\vec{H}\cdot grad\mu\right)\right) - \frac{\partial\varepsilon}{\partial t}\left(\frac{\partial\mu}{\partial t}\vec{H} + \mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\right) - \\ &-\varepsilon\left(\frac{\partial^2\mu}{\partial t^2}\vec{H} + 2\frac{\partial\mu}{\partial t}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} + \mu\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}\right) - \\ &-\sigma\left(\frac{\partial\mu}{\partial t}\vec{H} - \mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\right) + \left[grad\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}, \vec{E}\right] + \left[grad\varepsilon, \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right] + \left[grad\sigma, \vec{E}\right] = -rot\vec{J}^{cm}, \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} &\Delta\vec{E} + grad\left(\frac{1}{\varepsilon}\left(\vec{E}\cdot grad\varepsilon\right)\right) - \frac{\partial\mu}{\partial t}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}\vec{E} + \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \sigma\vec{E}\right) - \\ &-\mu\left(\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial t^2}\vec{E} + 2\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} + \frac{\partial\sigma}{\partial t}\vec{E} + \sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) - \\ &-\left[grad\frac{\partial\mu}{\partial t}, \vec{H}\right] - \left[grad\mu, \frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\right] = grad\left(\frac{1}{\varepsilon}\left(\rho + \rho^{cm}\right)\right) + \frac{\partial\mu}{\partial t}\vec{J}^{cm} + \mu\frac{\partial\vec{J}^{cm}}{\partial t}. \end{aligned} \tag{4}$$

Данные уравнения для векторов поля являются неоднородными. В правых частях выделены слагаемые, в которые входят заданные возбуждающие функции. В общем случае в уравнении (3) для вектора $\vec{H}$ содержатся слагаемые $\left[grad\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}, \vec{E}\right]$, $\left[grad\varepsilon, \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right]$, $\left[grad\sigma, \vec{E}\right]$, в которые входит вектор $\vec{E}$, а в уравнении (4) для вектора $\vec{E}$ содержатся слагаемые $\left[grad\frac{\partial\mu}{\partial t}, \vec{H}\right]$, $\left[grad\mu, \frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\right]$, в которые входит вектор $\vec{H}$. Возможен также несколько измененный вид этих уравнений, представляющий интерес с точки зрения дальнейшей классификации сред:

$$\Delta\vec{H}+grad\left(\frac{1}{\mu}\left(\vec{H}\cdot grad\mu\right)\right)-\varepsilon\left[grad\frac{1}{\varepsilon},rot\vec{H}\right]-$$
$$-\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}\left(\frac{\partial\mu}{\partial t}\vec{H}+\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\right)-\varepsilon\left(\frac{\partial^2\mu}{\partial t^2}\vec{H}+2\frac{\partial\mu}{\partial t}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}+\mu\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}\right)-\sigma\left(\frac{\partial\mu}{\partial t}\vec{H}+\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\right)+ \tag{5}$$
$$+\varepsilon\left[grad\left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}\right),\vec{E}\right]+\varepsilon\left[grad\frac{\sigma}{\varepsilon},\vec{E}\right]=-\varepsilon\, rot\left(\frac{1}{\varepsilon}\vec{j}^{cm}\right),$$

$$\Delta\vec{E}+grad\left(\frac{1}{\varepsilon}\left(\vec{E}\cdot grad\varepsilon\right)\right)-\mu\left[grad\frac{1}{\mu},rot\vec{E}\right]-$$
$$-\frac{\partial\mu}{\partial t}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}\vec{E}+\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\sigma\vec{E}\right)-\mu\left(\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial t^2}\vec{E}+2\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}+\frac{\partial\sigma}{\partial t}\vec{E}+\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)- \tag{6}$$
$$-\mu\left[grad\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial t}\right),\vec{H}\right]=grad\left(\frac{1}{\varepsilon}\left(\rho+\rho^{cm}\right)\right)+\frac{\partial\mu}{\partial t}\vec{j}^{cm}+\mu\frac{\partial\vec{j}^{cm}}{\partial t}.$$

Уравнение (5) представляет собой волновое уравнение для вектора электромагнитного поля $\vec{H}$, но в нем присутствуют слагаемые $\varepsilon\left[grad\left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}\right),\vec{E}\right]$, $\varepsilon\left[grad\frac{\sigma}{\varepsilon},\vec{E}\right]$, содержащие вектор поля $\vec{E}$. Аналогичная ситуация со вторым волновым уравнением для вектора электромагнитного поля $\vec{E}$, в котором присутствует слагаемое $\mu\left[grad\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial t}\right),\vec{H}\right]$, зависящее от $\vec{H}$.

Уравнения (3)–(6) являются обобщенными неоднородными волновыми уравнениями и описывают процессы возбуждения и распространения электромагнитных волн в пространстве. В общем случае решение данных уравнений невозможно. Стандартным, с целью упрощения, считается подход, при котором слагаемыми с градиентами параметров среды пренебрегают вследствие их малости [3, 4]. Такой подход становится неприемлемым при рассмотрении сред в значительной степени неоднородных, где вклад этих слагаемых значителен, т.е. становится сопоставимым по величине с другими слагаемыми. В рамках применяемого авторами обобщенного метода Фурье для построения аналитических решений [5] отсутствие независимости векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ для определенного круга сред не мешает проводить дальнейшее разделение переменных в рассматриваемых волновых уравнениях.

Анализируя уравнения (3)–(6) с точки зрения методики построения их решений, нетрудно определить среды, параметры которых позволяют выделить независимые уравнения хотя бы для одной из компонент электромагнитного поля, тем самым, определив порядок нахождения аналитических решений в каждом конкретном случае. Например, из (3) и (4) для среды с параметрами вида $\mu=\mu(t)$, а $\varepsilon=\varepsilon(\vec{r},t)$, $\sigma=\sigma(\vec{r},t)$ получим уравнения:

$$\Delta\vec{H}-\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}\left(\frac{\partial\mu}{\partial t}\vec{H}+\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\right)-$$
$$-\varepsilon\left(\frac{\partial^2\mu}{\partial t^2}\vec{H}+2\frac{\partial\mu}{\partial t}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}+\mu\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}\right)- \tag{7}$$
$$-\sigma\left(\frac{\partial\mu}{\partial t}\vec{H}+\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\right)+\left[grad\frac{\partial\varepsilon}{\partial t},\vec{E}\right]+\left[grad\varepsilon,\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right]+\left[grad\sigma,\vec{E}\right]=-rot\vec{J}^{cm},$$

$$\Delta\vec{E}+grad\left(\frac{1}{\varepsilon}\left(\vec{E}\cdot grad\varepsilon\right)\right)-\frac{\partial\mu}{\partial t}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}\vec{E}+\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\sigma\vec{E}\right)-$$
$$-\mu\left(\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial t^2}\vec{E}+2\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}+\frac{\partial\sigma}{\partial t}\vec{E}+\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)= \tag{8}$$
$$=grad\left(\frac{1}{\varepsilon}\left(\rho+\rho^{cm}\right)\right)+\frac{\partial\mu}{\partial t}\vec{J}^{cm}+\mu\frac{\partial\vec{J}^{cm}}{\partial t}.$$

Уравнение (8) содержит только неизвестную векторную функцию $\vec{E}$. Тогда решаем это уравнение, находим $\vec{E}$ и подставляем в (7). Полученное уравнение будет содержать только неизвестную векторную функцию $\vec{H}$. Следующий характерный пример. Из уравнения (5) для среды с параметрами $\varepsilon=\varepsilon_r(\vec{r})\cdot\varepsilon_t(t)$, $\sigma=\varepsilon_r(\vec{r})\cdot\sigma_t(t)$, а $\mu=\mu(\vec{r},t)$ получим уравнение:

$$\Delta\vec{H}+grad\left(\frac{1}{\mu}\left(\vec{H}\cdot grad\mu\right)\right)-\varepsilon\left[grad\frac{1}{\varepsilon},rot\vec{H}\right]-$$
$$-\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}\left(\frac{\partial\mu}{\partial t}\vec{H}+\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\right)-\varepsilon\left(\frac{\partial^2\mu}{\partial t^2}\vec{H}+2\frac{\partial\mu}{\partial t}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}+\mu\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}\right)- \tag{9}$$
$$-\sigma\left(\frac{\partial\mu}{\partial t}\vec{H}+\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\right)=-\varepsilon rot\left(\frac{1}{\varepsilon}\vec{J}^{cm}\right).$$

Отсюда можем найти $\vec{H}$, подставляем выражение для $\vec{H}$ в (6), из которого в результате можем найти $\vec{E}$. Среди сред с пространственно-временными изменениями параметров существуют такие, которые позволяют получать независимые уравнения для векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ одновременно. Например, для среды с параметрами вида $\mu=\mu_r(\vec{r})\cdot\mu_t(t)$, $\varepsilon=\varepsilon_r(\vec{r})\cdot\varepsilon_t(t)$, $\sigma=\varepsilon_r(\vec{r})\cdot\sigma_t(t)$ из уравнений (5),(6) получим разделенные уравнения:

$$\Delta\vec{H}+grad\left(\frac{1}{\mu}\left(\vec{H}\cdot grad\mu\right)\right)-\varepsilon\left[grad\frac{1}{\varepsilon},rot\vec{H}\right]-$$
$$-\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}\left(\frac{\partial\mu}{\partial t}\vec{H}+\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\right)-\varepsilon\left(\frac{\partial^2\mu}{\partial t^2}\vec{H}+2\frac{\partial\mu}{\partial t}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}+\mu\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}\right)- \tag{10}$$
$$-\sigma\left(\frac{\partial\mu}{\partial t}\vec{H}+\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\right)=-\varepsilon rot\left(\frac{1}{\varepsilon}\vec{J}^{cm}\right),$$

$$
\Delta\vec{E} + grad\left(\frac{1}{\varepsilon}\left(\vec{E}\cdot grad\varepsilon\right)\right) - \mu\left[grad\frac{1}{\mu}, rot\dot{\vec{E}}\right] -
$$

$$
-\frac{\partial\mu}{\partial t}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}\vec{E} + \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \sigma\vec{E}\right) - \mu\left(\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial t^2}\vec{E} + 2\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} + \frac{\partial\sigma}{\partial t}\vec{E} + \sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) = \qquad (11)
$$

$$
= grad\left(\frac{1}{\varepsilon}\left(\rho + \rho^{cm}\right)\right) + \frac{\partial\mu}{\partial t}\vec{J}^{cm} + \mu\frac{\partial\vec{J}^{cm}}{\partial t}.
$$

Проводя анализ уравнений (3)–(6), удалось сформулировать условия, позволяющие осуществить разделение уравнений Максвелла в рамках рассматриваемых сред. Эти условия, записанные в виде зависимостей параметров среды, определяют типы сред, для которых строятся аналитические решения методом разделения переменных. Результаты подобного анализа приведены в виде таблицы.

Таблица

Вид зависимостей параметров среды	Вектор, для которого возможно выделение независимого уравнения
$\varepsilon = \varepsilon(\vec{r},t)$, $\sigma = \sigma(\vec{r},t)$, $\mu = \mu(t)$	$\vec{E}$
$\varepsilon = \varepsilon(t)$, $\sigma = \sigma(t)$, $\mu = \mu(\vec{r},t)$	$\vec{H}$
$\varepsilon = \varepsilon(t)$, $\sigma = \sigma(t)$, $\mu = \mu(t)$	$\vec{H}$
$\varepsilon = \varepsilon(\vec{r},t)$, $\sigma = \sigma(\vec{r},t)$, $\mu = \mu(\vec{r})$	$\vec{E}$
$\varepsilon = \varepsilon(\vec{r})$, $\sigma = 0$, $\mu = \mu(\vec{r},t)$	$\vec{H}$
$\varepsilon = \varepsilon(\vec{r})$, $\sigma = 0$, $\mu = \mu(\vec{r})$	$\vec{H}$ и $\vec{E}$
$\varepsilon = \varepsilon(\vec{r},t)$, $\sigma = \sigma(\vec{r},t)$, $\mu = \mu_r(\vec{r})\cdot\mu_t(t)$	$\vec{E}$
$\varepsilon = \varepsilon_r(\vec{r})\cdot\varepsilon_t(t)$, $\sigma = \varepsilon_r(\vec{r})\cdot\sigma_t(t)$, $\mu = \mu(\vec{r},t)$	$\vec{H}$
$\varepsilon = \varepsilon_r(\vec{r})\cdot\varepsilon_t(t)$, $\sigma = \varepsilon_r(\vec{r})\cdot\sigma_t(t)$, $\mu = \mu_r(\vec{r})\cdot\mu_t(t)$	$\vec{H}$ и $\vec{E}$

В рамках рассматриваемой тематики стоит упомянуть вспомогательные функции, называемые электродинамическими потенциалами, введение которых во многих случаях оказывается удобным, и через которые определенным образом выражается электромагнитное поле. Неоднородные уравнения (3)–(6) для векторов поля обладают серьезным недостатком, заключающимся в том, что в их правой части стоит не сама возбуждающая функция, а ее rot или $grad$. Так как градиент и ротор представляют собой определенные комбинации частных производных по координатам, то может оказаться, что на границе области, охватывающей источники поля, эти величины вычислить невозможно. Так, например, в случае стороннего возбуждающего тока, текущего по проводу, плотность тока $\vec{J}^{cm}$ на границе проводника скачком уменьшается до нуля, и, следовательно, производная по нормали к поверхности провода равна бесконечности. Для определения электромагнитного поля в области, содержащей сторонние заряды и токи, желательно ввести вспомогательные функции, для которых дифференциальные уравнения содержали бы в правой части не $grad\rho^{cm}$ или $rot\vec{J}^{cm}$, а сами сторонние заряды ρ^{cm} или возбуждающие токи $\vec{J}^{cm}$. Такими вспомогательными функциями являются скалярная φ и векторная $\vec{A}$. В случае волнового характера распространения электромагнитного поля возможно формирование волнового уравнения только для векторного потенциала без потери общности получаемых результатов:

$$\Delta\vec{A} - \mu\left[grad\frac{1}{\mu}, rot\vec{A}\right] - \mu\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \mu\sigma\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\mu\vec{J}^{cm}, \qquad (12)$$

$$\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)\frac{grad\varepsilon}{\varepsilon} = -\frac{\rho + \rho^{cm}}{\varepsilon}. \qquad (13)$$

Уравнение (12) является обобщенным неоднородным волновым уравнением относительно векторного потенциала $\vec{A}$, а соотношение (13) является дополнительным условием, которому должен удовлетворять векторный потенциал. Скалярный потенциал можно обнулить из физических соображений: в случае электромагнитной волны электрическое $\vec{E}$ и магнитное $\vec{H}$ поля носят вихревой характер, так как известна сущность процесса распространения электромагнитных волн, заключающегося в том, что изменяющееся вихревое электрическое поле порождает изменяющееся вихревое магнитное поле, и наоборот. Скалярный потенциал не добавляет составляющую к вихревому электрическому полю и, следовательно, не сказывается на вихревом магнитном поле.

На основе преобразований, рассмотренных выше, были разработаны алгоритмы построения волновых уравнений в неоднородных средах и их программная реализация на языке системы компьютерной алгебры Maple. Созданный программный пакет включает различные программы, позволяющие строить волновые уравнения относительно векторов электромагнитного поля $\vec{H}$ и $\vec{E}$ или электродинамических потенциалов в случае произвольных зависимостей параметров среды от координат и времени в рамках класса неоднородных сред. Зачастую выражения для электромагнитных полей удобнее отыскивать в так называемых «естественных» для конкретной геометрии поля системах координат. Это могут быть как ортогональные, так и неортогональные криволинейные координаты. При этом волновые уравнения необходимо записать в выбранной системе координат. По этой причине разработанные программы допускают построение волновых уравнений во всех известных ортогональных системах координат. Более того, построив волновые уравнения, например, в декартовой системе координат, имеется возможность перейти к произвольным координатам. Единственным требованием такого перехода является невырожденность преобразования. Безусловно, создание упомянутого программного обеспечения не является самоцелью. Его использование автоматизировало довольно трудоемкий этап построения аналитических решений уравнений Максвелла для рассматриваемых сред и, что немаловажно, позволило провести анализ построенных волновых уравнений с целью классификации задач электродинамики по типу сред распространения с точки зрения возможности построения аналитического решения методом разделения переменных.

В качестве заключения можно сказать, что ограниченность типов сред, представленных в таблице, в которых возможно получение аналитических решений при рассматриваемом подходе, может быть преодолена. Одним из путей решения подобной проблемы авторы видят использование матричного представления уравнений Максвелла. Это является направлением дальнейших исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Красюк Н.П., Дымович Н.Д.*** Электродинамика и распространение радиоволн. – М., 1974.
2. ***Никольский В.В., Никольская Т.И.*** Электродинамика и распространение радиоволн. – М., 1989.
3. ***Марков Г.Т. и др.*** Электродинамика и распространение радиоволн. – М., 1979.
4. ***Вайнштейн Л.А.*** Электромагнитные волны. – М., 1988.
5. ***Андрушкевич И.Е.*** Об одном обобщении метода Фурье разделения переменных // ЭВ & ЭС, 1998, № 4.

SUMMARY

Algorithms of wave equations shaping for electromagnetism of the lumpy ambiences are considered in the article. The analysis of the built equations in the manner of parameter of the ambiences, allowing division of the equations by Maxwell is given.

Поступила в редакцию 28.12.2004