УДК 512.542

А.И. Прокопенко

Нормальные замыкания проекторов в конечных группах

Рассматриваются только конечные группы. Используются определения и обозначения из [1].

В 1963 году Гашюц ввел понятие формации и доказал, что для насыщенной формации $\mathfrak{F}$ каждая разрешимая группа обладает точно одним классом сопряженных $\mathfrak{F}$-проекторов. В 1967 году Шунк установил, что для гомоморфа $\mathfrak{X}$ тогда и только тогда в каждой разрешимой группе существует точно один класс сопряженных $\mathfrak{X}$-проекторов, когда $\mathfrak{X}$ является примитивно замкнутым классом (впоследствии назван классом Шунка).

Постепенно возникло направление, связанное с изучением классов Шунка $\mathfrak{X}$, для которых $\mathfrak{X}$-проекторы обладают специальным вложением. В [2] Гашюц предложил один из способов вложения $\mathfrak{X}$-проекторов в группу. Он ввел класс

Roc$\mathfrak{X}$ = (G | нормальное замыкание H^G = G для некоторого $\mathfrak{X}$-проектора H группы G) и доказал, что Roc$\mathfrak{X}$ в классе разрешимых групп является классом Шунка.

В настоящей работе для класса Шунка $\mathfrak{X}$ устанавливаются новые свойства класса Roc$\mathfrak{X}$ в конечных группах.

Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторый класс групп. Подгруппа H называется $\mathfrak{X}$-проектором группы G, если $H \in \mathfrak{X}$ и из условий $H \subseteq U \subseteq G$, $V \lhd U$ и $U / V \in \mathfrak{X}$ всегда следует $HV = U$. Класс Шунка – непустой гомоморф $\mathfrak{X}$, для которого из условия $G/M_G \in \mathfrak{X}$ для любой максимальной подгруппы M из G всегда следует $G \in \mathfrak{X}$. Здесь M_G – ядро максимальной подгруппы M группы G, т.е. $M_G = \cap M^g$ для любого $g \in G$. Через π обозначается некоторое множество простых чисел, π' – дополнение к π в множестве всех простых чисел. Если для класса групп $\mathfrak{X}$ из условия $G/O_{\pi'} \in \mathfrak{X}$ всегда следует $G \in \mathfrak{X}$, то $\mathfrak{X}$ называется π-классом. Через C_p обозначается циклическая группа простого порядка p. Используются следующие обозначения классов групп: $\mathfrak{G}_{\pi'}$ – класс всех π'-групп; $\mathfrak{S}^{\pi}$ – класс всех π-разрешимых групп; $\mathfrak{N}_{\pi}$ – класс всех нильпотентных π-групп, $\mathfrak{S}$ – класс всех разрешимых групп.

Назовем всякий {Ext_{Φ}, R_0, Q, S}-замкнутый класс $\mathfrak{K}$ проективной оболочкой класса Шунка $\mathfrak{X}$, если любая группа из $\mathfrak{K}$ обладает точно одним классом сопряженных $\mathfrak{X}$-проекторов. Примером проективной оболочки класса Шунка $\mathfrak{X}$ может служить класс всех разрешимых групп $\mathfrak{S}$. Отметим, что для π-класса Шунка $\mathfrak{X}$ во всякой π-разрешимой группе $\mathfrak{X}$-проекторы существуют и сопряжены (см., напр. [3]). Если класс Шунка $\mathfrak{X}$ является π-классом, то в качестве $\mathfrak{K}$ можно взять класс всех π-разрешимых групп $\mathfrak{S}^{\pi}$.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{X}$ – класс Шунка и $\mathfrak{K}$ – его проективная оболочка. Тогда Roc$\mathfrak{X} \cap \mathfrak{K}$ является классом Шунка и для любой группы $G \in \mathfrak{K}$ и ее $\mathfrak{X}$-проектора H подгруппа H^G есть Roc$\mathfrak{X}$-проектор в G.*

Доказательство. Пусть $G \in$ Roc$\mathfrak{X} \cap \mathfrak{K}$ и $N \lhd G$. Ясно, что $G/N \in \mathfrak{K}$. Покажем, что $G/N \in$ Roc$\mathfrak{X}$.

Пусть H – $\mathfrak{X}$-проектор группы G, тогда HN/N – $\mathfrak{X}$-проектор в G/N по лемме 15.1 из [1]. Обозначим $K/N = (HN/N)^{G/N}$. Предположим, что $K/N \neq G/N$. Так как $K/N \lhd G/N$, то $K \lhd G$. Из $H \subset K \subset G$ следует, что $H^g \subset K$ для любого $g \in G$. Отсюда и из $G \in$ RocX получаем, что $G = H^G \subseteq K$. Значит, $G/N \subseteq K/N$. Противоречие. Итак, $(HN/N)^{G/N} = G/N$, т.е. $G/N \in$ Roc$\mathfrak{X}$. Тем самым доказано, что $G/N \in$ Roc$\mathfrak{X} \cap \mathfrak{K}$.

Рассмотрим теперь $G/M_G \in$ Roc$\mathfrak{X} \cap \mathfrak{K}$ для любой максимальной в G подгруппы M. Пусть G – группа наименьшего порядка такая, что $G/M_G \in$ Roc$\mathfrak{X} \cap \mathfrak{K}$, но $G \notin$ Roc$\mathfrak{X} \cap \mathfrak{K}$. Из того, что $G/M_G \in \mathfrak{K}$ и $R_0\mathfrak{K} \subset \mathfrak{K}$ следует, что $G/\cap M_G \in \mathfrak{K}$, где M_G пробегает ядра всех максимальных подгрупп из G. Но $\cap M_G = \Phi(G)$. Из $Ext_{\Phi}\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{K}$ вытекает $G \in \mathfrak{K}$.

Выберем в G произвольную минимальную нормальную подгруппу N и рассмотрим G/N. Пусть W/N – произвольная максимальная подгруппа из G/N. Имеем

$$(W/N)_{G/N} = \cap (W/N)^{gN} = \cap W^g/N = W_G/N \text{ для любого } g \in G.$$

Так как $G/N/(W/N)_{G/N} = G/N/W_G/N \cong G/W_G \in$ Roc$\mathfrak{X} \cap \mathfrak{K}$, то $G/N \in$ Roc$\mathfrak{X} \cap \mathfrak{K}$.

Пусть H – $\mathfrak{X}$-проектор группы G. По выбору G имеем, что $H^G \neq G$. Обозначим $S = H^G$. Тогда в G можно выбрать максимальную подгруппу T, содержащую S. Получаем, что либо TN = G, либо $N \subset T$.

Если $TN = G$, то N можно выбрать из T_G. В этом случае $T = T \cdot T_G = G$. Противоречие.

Пусть теперь $N \subset T$. Из того, что $HT_G/T_G \subseteq ST_G/T_G \lhd G/T_G$ и $G/T_G \in \mathrm{Roc}\mathfrak{X}$ для $\mathfrak{X}$-проектора HT_G/T_G его нормальное замыкание в G/T_G совпадает с G/T_G и содержится в ST_G/T_G. Но тогда $G \subseteq ST_G \subseteq T$. Противоречие. Таким образом, $H^G = G$, т.е. $G \in \mathrm{Roc}\,\mathfrak{X}$.

Итак, мы показали, что $\mathrm{Roc}\mathfrak{X} \cap \mathfrak{K}$ – класс Шунка.

Теперь покажем, что H^G – $\mathrm{Roc}\mathfrak{X}$-проектор в G. Обозначим $H^G = R$. Так как H – $\mathfrak{X}$-проектор в G и $H \subset R$, то H – $\mathfrak{X}$-проектор в R. Предположим, что нормальное замыкание $H^R \neq R$, тогда в R можно выбрать максимальную подгруппу M, содержащую H^R. Возьмем любой элемент $g \in G$. Подгруппа H^g является $\mathfrak{X}$-проектором в G. Так как $R \lhd G$, то $H^g \subseteq R$. Поэтому $H^g = H_1$ – $\mathfrak{X}$-проектор в R. Из $R \subset G \subset \mathfrak{K}$ и S-замкнутости $\mathfrak{K}$ получаем, что в R существуют и сопряжены $\mathfrak{X}$-проекторы. Следовательно, найдется $x \in R$ такое, что $H_1 = H^x \subseteq H^R$, т.е. $H^g \subseteq M$ для любого $g \in G$. Отсюда следует $H \subseteq M_G \lhd G$. Поэтому $R \subset M_G \subset M$. Противоречие. Следовательно, $H^R = R$, т.е. $H^G \in \mathrm{Roc}\mathfrak{X}$.

Пусть теперь $R \subseteq U \subseteq G$, $V \lhd U$ и $U / V \in \mathrm{Roc}\mathfrak{X}$.

Так как $U \subseteq G \subseteq \mathfrak{K}$, а $\mathfrak{K}$ – S-замкнута и Q-замкнута, то $U / V \in \mathfrak{K}$, т.е. в U / V существуют и сопряжены $\mathfrak{X}$-проекторы. Тогда $U / V = (H_1 / V)^{U/V}$ для некоторого H_1 / V – $\mathfrak{X}$-проектора в U / V. Так как H – $\mathfrak{X}$-проектор в G и $H \subseteq U \subseteq G$, то H – $\mathfrak{X}$-проектор в U. Следовательно, по лемме 15.1 из [1] HV / V – $\mathfrak{X}$-проектор в U / V и $(HV / V)^{uV} = H_1 / V$ для некоторого $u \in U$. Имеем $U / V = ((HV / V)^{uV})^{U/V} = (H^uV / V)^{U/V}$. Так как $H^u \subset R$, то $H^uV / V \subset RV / V \lhd U / V$. Поэтому нормальное замыкание $(H^uV / V)^{U/V} \subset RV / V$. Тогда $U / V \subset RV / V$ и $U \subset RV$. Отсюда и из $RV \subseteq U$ получаем $U = RV$. Теорема доказана.

Следствие. *Если $\mathfrak{X}$ – π-класс Шунка, то $\mathrm{Roc}\mathfrak{X} \cap \mathfrak{S}^\pi$ также является π-классом Шунка и для любой π-разрешимой группы G и ее $\mathfrak{X}$-проектора R подгруппа H^G есть $\mathrm{Roc}\mathfrak{X}$-проектор в G.*

Рассмотрим теперь в качестве проективной оболочки π-класса Шунка класс всех π-разрешимых групп.

Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{H}$ – некоторые классы групп. Обозначим $\mathrm{Roc}_{\mathfrak{H}}\mathfrak{X} = \mathrm{Roc}\mathfrak{X} \cap \mathfrak{H}$.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{H}$ – π-классы Шунка такие, что $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{H} \subset \mathfrak{S}^\pi$, и пусть $\omega = \{p \mid C_p \in \mathfrak{H}\} \cap \pi$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) $\mathrm{Roc}_{\mathfrak{H}}\mathfrak{X} = \mathfrak{H}$;

2) $\mathfrak{E}_{\pi'}\mathfrak{N}_\omega \subseteq \mathfrak{X}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что из условия 1) следует 2). Предположим, что $\mathfrak{E}_{\pi'}\mathfrak{N}_\omega \not\subset \mathfrak{X}$. Тогда $\mathfrak{E}_{\pi'}\mathfrak{N}_\omega \setminus \mathfrak{X} \neq \varnothing$. Выберем в $\mathfrak{E}_{\pi'}\mathfrak{N}_\omega \setminus \mathfrak{X}$ группу G наименьшего порядка. Через K обозначим $\mathfrak{N}_\omega$-корадикал группы G. Из того, что $G \in \mathfrak{E}_{\pi'}\mathfrak{N}_\omega$, следует $K \in \mathfrak{E}_{\pi'}$. Поэтому $K \subseteq O_{\pi'}(G)$. Если $K \neq 1$, то по выбору G факторгруппа $G/K \in \mathfrak{X}$. Тогда $G/O_{\pi'}(G) \cong G/K/O_{\pi'}(G)/K \in \mathfrak{X}$. Поэтому $G/O_{\pi'}(G) \in \mathfrak{X}$. Так как $\mathfrak{X}$ является π-классом, то $G \in \mathfrak{X}$. Противоречие.

Значит, $K = 1$. Так как K – $\mathfrak{N}_\omega$-корадикал группы G, то $G \in \mathfrak{N}_\omega$.

Предположим, что G не является циклической группой простого порядка q, где $q \in \omega$. Из $G \in \mathfrak{N}_\omega$ следует, что всякая максимальная подгруппа M группы нормальна в G. Это означает, что ядро M_G подгруппы M в G совпадает с самой подгруппой M. Тогда по выбору G факторгруппа $G/M_G \in \mathfrak{X}$ и, следовательно, $G \in \mathfrak{X}$. Противоречие.

Пусть $G = C_q$ – циклическая группа простого порядка q, где $q \in \omega$. Так как $C_q \in \mathfrak{H}$, то из условия 1) получим $G \in \mathrm{Roc}\mathfrak{X}$. В группе G существует $\mathfrak{X}$-проектор, обозначим его через H. Из $G = C_q$ и $G \in \mathrm{Roc}\mathfrak{X}$ получаем $H^G = G = H$. Отсюда $G \in \mathfrak{X}$, так как H – $\mathfrak{X}$-проектор группы G. Противоречие. Таким образом, $\mathfrak{S}_{\pi'}\mathfrak{N}_\omega \subseteq \mathfrak{X}$.

Докажем, что из условия 2) следует 1). Так как $\mathrm{Roc}_{\mathfrak{H}}\mathfrak{X} \subset \mathfrak{H}$. то остается доказать, что $\mathfrak{H} \subset \mathrm{Roc}_{\mathfrak{H}}\mathfrak{X}$.

Пусть $G \in \mathfrak{H}$ и H – $\mathfrak{X}$-проектор группы G. Допустим, что $H^G \neq G$. Так как $H^G \lhd G$, то рассмотрим главный ряд группы G, проходящий через H^G:

$H^G = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_{n-1} \subset H_n = G$, где $H_i \lhd G$ ($i = 0, \ldots, n - 1$).

Из того, что G – π-разрешимая группа, следует, что либо $|H_i : H_{i-1}| = q^\alpha$, для некоторого $q \in \pi$, либо $|H_i : H_{i-1}|$ является π'-числом, $i = 1, \ldots, n$.

Пусть $|G/H_{n-1}| = q^\alpha$, $q \in \pi$. Тогда $G/H_{n-1} \in \mathfrak{H} \cap \mathfrak{N}_q$. Поэтому $C_q \in \mathfrak{H}$. Таким образом, $q \in \omega$. В этом случае $G/H_{n-1} \in \mathfrak{N}_\omega \subseteq \mathfrak{S}_{\pi'}\mathfrak{N}_\omega \subseteq \mathfrak{X}$. Если $|G/H_{n-1}|$ является π'-числом, то $G/H_{n-1} \in \mathfrak{S}_{\pi'} \subset \mathfrak{S}_{\pi'}\mathfrak{N}_\omega \subseteq \mathfrak{X}$. Значит, в обоих случаях $G/H_{n-1} \in \mathfrak{X}$. Теперь из определения $\mathfrak{X}$-проектора получаем $G = H \cdot H_{n-1} \subset H_{n-1}$. Противоречие. Следовательно, $H^G = G$. Это означает $G \in \mathrm{Roc}\,\mathfrak{X}$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть $\mathfrak{X}$ – π-класс Шунка. Всякая π-разрешимая группа совпадает с нормальным замыканием своего $\mathfrak{X}$-проектора тогда и только тогда, когда $\mathfrak{S}_{\pi'}\mathfrak{N}_\pi \subset \mathfrak{X}$.*

Следствие 2. *Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{H}$ – классы Шунка такие, что $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{S}$. Всякая $\mathfrak{H}$-группа совпадает с нормальным замыканием своего $\mathfrak{X}$-проектора тогда и только тогда, когда $\mathfrak{N}_\omega \subset \mathfrak{X}$, где $\omega = \{p \mid C_p \in \mathfrak{H}\}$.*

Отсюда в случае, когда $\mathfrak{H}$ есть класс всех разрешимых групп (π совпадает с множеством всех простых чисел), получается V. 15. b из [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Шеметков Л.А.*** Формации конечных групп. – М., 1978. – 272 с.
2. ***Gaschütz W.*** Lectures on subgroups of Sylov type in finite soluble groups. – Canberra: Austral. Nat. Univ., 1979. V. 11. – 100 p.
3. ***Covaci R.*** Projectors in finite π-solvable groups // Stud. Univ. Babes-Bolyai, 1977. V. 22, № 1. – P. 3–5.

S U M M A R Y

Let X be a Schunck class. Then $\mathrm{Roc}\mathfrak{X} = (G \mid H^G = G$ for some $\mathfrak{X}$-projector H of G). In this paper we prove the new properties of class $\mathrm{Roc}\mathfrak{X}$ in the class of finite groups.

Поступила в редакцию 20.11.2003