УДК 517.925

Чжоу Чжиньсинь

Об отражающей функции дифференциальных систем второго порядка с полиномиальной правой частью

Известно [1-3], что дифференциальная система

$$\begin{cases} \dot{x} = a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2 = P(t,x,y) \\ \dot{y} = b_1x + b_2y + b_3x^2 + b_4xy + b_5y^2 = Q(t,x,y) \end{cases} \tag{1}$$

($a_i := a_i(t), b_i := b_i(t), i = \overline{1,5}$ – непрерывно дифференцируемые функции на **R**) может иметь линейную отражающую функцию (ОФ). Здесь мы дадим ответ на вопрос: Когда первая компонента ОФ системы (1) имеет вид $f(t)x$, и какой вид при этом будет иметь её вторая компонента. Следствием этого факта, в частности, являются необходимые и достаточные коэффициенты условия четности первой компоненты любого решения системы (1).

Пусть система (1) имеет ОФ: $F(t,x,y) = (F_1(t,x,y), F_2(t,x,y))^T$.

Лемма 1. *Если* $F_1(t,x,y) = f(t)x$, *то*

$$\dot{f}(0) + 2a_1(0) = 0, a_i(0) = 0 (i = \overline{2,5}). \tag{2}$$

Доказательство. Пусть $F_1(t,x,y) = f(t)x$, тогда из основного соотношения [1,с.11] следует

$$A_0(t,x,y) + A_1(t,x)\bar{y} + A_2(t)\bar{y}^2 \overset{\forall t,x,y}{\equiv} 0 \tag{3}$$

где

$$\bar{y} := F_2(t,x,y); A_2(t) := \bar{a}_5; A_1(t,x) = \bar{a}_2 + \bar{a}_4 f(t)x; \ A_0(t,x,y) = \dot{f}(t)x + a_1x +$$
$$a_3x^2 + \bar{a}_1 f(t)x + \bar{a}_3 f^2(t)x^2; \ \bar{a} := a(-t) \text{ и т.п.}$$

Положим $t = 0$, тогда

$$\dot{f}(0)x(0) + 2\left[a_1(0)x(0) + a_2(0)y(0) + a_3(0)x^2(0) + a_4(0)x(0)y(0) + a_5(0)y^2(0)\right] \overset{\forall x(0),y(0)}{\equiv} 0.$$

Отсюда следует утверждение леммы.

В дальнейшем мы предположим, что условия (2) выполнены, а всякое написанное неравенство вида $a(t) \neq 0$ считается выполненным в некоторой проколотой окрестности точки $t = 0$.

Лемма 2. *Пусть* $F_1(t,x,y) = f(t)x, a_5(t) \equiv 0$ *и* $a_2^2(t) + a_4^2(t) \neq 0$. *Тогда* $F_2(t,x,y) = g_0(t,x) + g_1(t,x)y$ (где $g_0(t,x), g_1(t,x)$ – *непрерывно дифференцируемые функции на* R^2).

Доказательство. Пусть $F_1(t,x,y) = f(t)x$, тогда из (3) следует

$$\dot{f}(t)x + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + \bar{a}_1 f(t)x + \bar{a}_3 f^2(t)x^2 + (\bar{a}_2 + \bar{a}_4 f(t)x)\bar{y} \equiv 0.$$

Если $\bar{a}_2 + \bar{a}_4 f(t)x \neq 0$, то отсюда следует $F_2(t,x,y) = g_0(t,x) + g_1(t,x)y$. Если $\bar{a}_2 + \bar{a}_4 f(t)x \equiv 0$, то $\bar{a}_2 \equiv 0$ и $\bar{a}_4 \equiv 0$, а это по условию леммы невозможно. Поэтому лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть* $F_1(t,x,y) = x$ *и* $a_5(t) \neq 0$. *Тогда, если существует*

$$\lim_{t\to 0}\frac{a_2(t)}{a_5(t)} \text{ и } \lim_{t\to 0}\frac{a_4(t)}{a_5(t)}, \text{ то } \lim_{t\to 0}\frac{a_1(t)+a_1(-t)}{a_5(t)} = 0, \quad \lim_{t\to 0}\frac{a_3(t)+a_3(-t)}{a_5(t)} = 0,$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{a_5(-t)}{a_5(t)} = -1.$$

Доказательство. Пусть $F_1(t,x,y) = x$, тогда из (3) следует

$$\lim_{t\to 0}\frac{a_1+\bar{a}_1}{a_5}x(0) + x^2(0)\lim_{t\to 0}\frac{a_3+\bar{a}_3}{a_5} + \lim_{t\to 0}\left(\frac{a_2}{a_5}+\frac{\bar{a}_2}{a_5}\right)y(0) + \lim_{t\to 0}\left(\frac{a_4}{a_5}+\frac{\bar{a}_4}{a_5}\right)x(0)y(0) +$$

$$\lim_{t\to 0}\left(1+\frac{\bar{a}_5}{a_5}\right)y^2(0) \overset{\forall x(0),y(0)}{=} 0.$$

Отсюда и следует утверждение леммы.

Теорема 1. *Пусть* $F_1(t,x,y) = f(t)x$ *и* $a_5(t) \neq 0$ *и существует* $\lim\limits_{t\to 0}\frac{a_2(t)}{a_5(t)}$ *и* $\lim\limits_{t\to 0}\frac{a_4(t)}{a_5(t)}$. *Тогда* $F_2(t,x,y) = g_0(t) + g_1(t)x + g_2(t)y$ *(где* $g_0(t), g_1(t), g_2(t)$ *– непрерывно дифференцируемые функции на* R).

Доказательство. Пусть $F_1(t,x,y) = f(t)x$, тогда из (3) следует

$$\bar{y}^2 = -\frac{1}{A_2(t)}\left[A_0(t,x,y) + A_1(t,x)\bar{y}\right] \tag{4}$$

Дифференцируя формулу (3) найдем

$$A_{0t} + A_{0x}P + A_{0y}Q + \left[A_{1t} + A_{1x}P\right]\bar{y} + A_{2t}\bar{y}^2 - \left(A_1 + 2A_2\bar{y}\right)Q(-t, f(t)x, \bar{y}) = 0. \tag{5}$$

Учитывая (4) и (5) получим

$$B_1(t,x,y) + B_2(t,x,y)\bar{y} = 0, \tag{6}$$

где $B_1(t,x,y) = A_2\left[A_{0t} + A_{0x}P + A_{0y}Q\right] - A_0A_{2t} - A_2A_1\bar{q}_0 + 2A_0A_2\bar{q}_1 - A_0A_1\bar{q}_2 =$

$$\sum_{i+j=1}^{3} B_{1ij}(t)x^i x^j;$$

$$B_2(t,x,y) = A_2\left[A_{1t} + A_{1x}P\right] - A_1A_{2t} - 2A_2^2\bar{q}_0 + A_1A_2\bar{q}_1 + (2A_0A_1 - A_1^2)\bar{q}_2 =$$

$$\sum_{i+j=1}^{2} B_{2ij}(t)x^i x^j;$$

$$q_0 := b_1x + b_3x^2; q_1 := b_2x + b_4x^2; q_2 := b_5.$$

1) Если $B_2(t,x,y) \neq 0$, то из (6) следует $\bar{y} = -\frac{B_1(t,x,y)}{B_2(t,x,y)}$. Отсюда и (3) вытекает тождество

$$-\bar{a}_5B_1^2(t,x,y) = B_2(t,x,y)[\dot{f}(t)x + f(t)P(t,x,y) + \bar{a}_1f(t)x + \bar{a}_3f^2(t)x^2 +$$
$$(\bar{a}_2 + \bar{a}_4f(t)x)B_1(t,x,y)B_2(t,x,y)]$$

из которого следует

$$\bar{y} = \sum_{i+j=1}^{3} g_{ij}(t)x^i y^j.$$

Подставляя эту формулу в (3) найдем $\bar{y} = g_0(t) + g_1(t)x + g_1(t)y$. В этом случае теорема доказана.

2) Если $B_2(t,x,y) \equiv 0$, то и $B_1(t,x,y) \equiv 0$. При $b_5 \neq 0$, из $B_2(t,x,y) \equiv 0$, $B_1(t,x,y) \equiv 0$ следует $f(t) = 1$ и

$$\bar{a}_5[(a_1 + \bar{a}_1)' + a_1(a_1 + \bar{a}_1) + a_2 b_1 - \bar{a}_2 \bar{b}_1] + (a_1 + \bar{a}_1)\bar{\alpha} = 0; \tag{7.1}$$

$$\bar{a}_5[(a_3 + \bar{a}_3)' + a_3(a_1 + \bar{a}_1) + 2a_1(a_3 + \bar{a}_3) + a_2 b_3 + a_4 b_1 - \bar{a}_2 \bar{b}_3 - \bar{a}_4 \bar{b}_1] +$$
$$+ (a_1 + \bar{a}_1)\bar{\beta} + (a_3 + \bar{a}_3)\bar{\alpha} = 0; \tag{7.2}$$

$$2\bar{a}_5 a_3(a_3 + \bar{a}_3) + \bar{a}_5(a_4 b_3 - \bar{a}_4 \bar{b}_3) + (a_3 + \bar{a}_3)\bar{\beta} = 0; \tag{7.3}$$

$$a_5 \bar{a}_5(a_1 + \bar{a}_1) + \bar{a}_5 \alpha + a_5 \bar{\alpha} = 0; \tag{7.4}$$

$$2a_5 \bar{a}_5(a_3 + \bar{a}_3) + \bar{a}_5 \beta + a_5 \bar{\beta} = 0; \tag{7.5}$$

$$a_5 \dot{a}_2 - a_2 \dot{a}_5 = a_2 a_5 b_2 - a_2^2 b_5; \tag{7.6}$$

$$a_5 \dot{a}_4 - a_4 \dot{a}_5 = a_5 a_2 b_4 + a_5 a_4 b_2 + 2a_5 b_5 a_1 - 2a_2 a_4 b_5 - 2a_5^2 b_1; \tag{7.7}$$

$$a_5 a_4 b_4 + 2a_5 a_3 b_5 = a_4^2 b_5 + 2a_5^2 b_3; \tag{7.8}$$

$$a_4 + 2b_5 = 0; \tag{7.9}$$

где $\alpha := \dot{a}_5 + 2a_5 b_2 - a_2 b_5; \beta := 2a_5 b_4 - a_4 b_5$.

В силу условия данной теоремы и из (7.6), (7.7) следует $a_2 = m(t)a_5$, $a_4 = n(t)a_5$. Из (7.4) следует $a_5 = \gamma(t)e^{\delta(t)}$, где $\gamma(t) + \gamma(-t) = 0$,

$$\delta(t) = -\int_0^t \left[\frac{a_1 + \bar{a}_1}{2} + b_2 + \bar{b}_2 + \frac{1}{4}\left(m a_4 + \bar{m}\bar{a}_4\right)\right] dt.$$

Из (7.1), (7.2) следует $a_1 + \bar{a}_1 = k_1(t)\gamma(t), a_3 + \bar{a}_3 = k_2(t)\gamma(t)$, где $k_1(t) + k_1(-t) = 0$, $k_2(t) + k_2(-t) = 0$. Положим $u = m^2 e^{\delta} - \bar{m}^2 e^{-\delta}$; $v = mne^{\delta} - \bar{m}\bar{n}e^{-\delta} - 2k_1$; $w = n^2 e^{\delta} - \bar{n}^2 e^{-\delta} - 4k_2$; $\Delta = 16\bar{a}_5[(\bar{a}_5 a_2^2 + a_5 \bar{a}_2^2) + 2(\bar{a}_5 a_2 a_4 + a_5 \bar{a}_2 \bar{a}_4 - 2a_5 \bar{a}_5(a_1 + \bar{a}_1))x + (\bar{a}_5 a_4^2 + a_5 \bar{a}_4^2 - 4a_5 \bar{a}_5(a_3 + \bar{a}_3))x^2] = 16\gamma^4 e^{-\delta}[u + 2vx + wx^2]$.

В силу леммы 3 находим $u(0) = v(0) = w(0) = 0$. Учитывая (7.1)-(7.9) получим

$$\begin{cases} u' = u\left[-\dfrac{a_1 + \bar{a}_1}{2} + b_2 - \bar{b}_2 + mn\gamma e^{\delta} + \dfrac{\gamma}{4}\left(\bar{m}\bar{n}e^{-\delta} - mne^{\delta}\right)\right] - \dfrac{\gamma}{2}\bar{m}^2 e^{-\delta} v; \\ v' = u\left[\dfrac{1}{2}a_3 + \dfrac{1}{2}b_4 + \dfrac{1}{8}n^2\gamma e^{\delta}\right] + v\left[\dfrac{\bar{a}_1 - a_1}{2} + b_2 - \bar{b}_2 + \dfrac{3}{4}\gamma\left(mne^{\delta} + \bar{m}\bar{n}e^{-\delta}\right)\right] \\ \qquad + \dfrac{\gamma}{8}\left[m^2 e^{\delta} + \bar{m}^2 e^{-\delta}\right] w; \\ w' = v\left[a_3 + b_4 + \dfrac{n^2}{4}\gamma e^{\delta}\right] + w\left[\bar{a}_1 - a_1 + b_2 - \bar{b}_2 + \left(mne^{\delta} + \bar{m}\bar{n}e^{-\delta}\right)\gamma\right] \end{cases}$$

Это линейная система, поэтому $u(t) = v(t) = w(t) = 0$, т.е. $\Delta \equiv 0$. Тогда из (3) следует

$$\bar{y} = -\frac{\bar{a}_2 + \bar{a}_4 x}{2\bar{a}_5} - \sqrt{-\frac{a_5}{\bar{a}_5}}\,\frac{a_2 + a_4 x}{2a_5} + \sqrt{-\frac{a_5}{\bar{a}_5}}\,y = g_0(t) + g_1(t)x + g_2(t)y.$$

При $b_5 \equiv 0$ рассуждаем аналогично. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть* $a_5(t) \neq 0$. *Тогда*

1^0. *Если*

$$\begin{cases} \bar{a}_2\left[\dot{\varphi} + \varphi^2\right] + \left[2\bar{a}_2 a_1 + \bar{c}_2\right]\varphi = \bar{a}_2(\bar{c}_1 - c_1) - \bar{c}_2(a_1 + \bar{a}_1); \\ \bar{a}_2\left[a_2 b_3 + a_3\varphi^*\right] = \left[\bar{a}_2^2\bar{b}_3 - \bar{a}_2\bar{b}_4\varphi^* + \bar{b}_5\varphi^{*2}\right]f; \\ \bar{a}_2\left[a_2 b_4 + a_4\varphi^*\right] = a_2\left[2\bar{b}_5\varphi^* - \bar{a}_2\bar{b}_4\right]f; \\ \bar{a}_2\left[a_2 b_5 + a_5\varphi^*\right] = a_2^2\bar{b}_5 f; \\ \bar{a}_2^2 a_3 + \left[\bar{a}_2^2\bar{a}_3 - \bar{a}_2\bar{a}_4\varphi^* + \bar{a}_5\varphi^{*2}\right]f = 0; \\ \bar{a}_2^2 a_4 + a_2\left[2\bar{a}_5\varphi^* - \bar{a}_2\bar{a}_4\right]f = 0; \bar{a}_2^2 a_5 + \bar{a}_5 a_2^2 f = 0; \\ \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\bar{a}_2}{a_2} = -l; \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\dot{f} + fa_1 + \bar{a}_1}{a_2} = 0; a_2 \neq 0, \end{cases} \tag{8}$$

где $f = \exp\int\limits_0^t \varphi(\tau)d\tau$, $\varphi = -\dfrac{1}{2}\left[a_1 + \bar{a}_1 + b_2 + \bar{b}_2 + \dfrac{\dot{a}_2}{a_2} - \dfrac{\dot{\bar{a}}_2}{\bar{a}_2}\right]$, $\varphi^* = \varphi + a_1 + \bar{a}_1$,

$c_1 = \dot{a}_1 + a_1^2 + a_2 b_1$, $c_2 = \dot{a}_2 + a_2 a_1 + a_2 b_2$, *то* $F(t,x,y) = (fx, -\dfrac{1}{\bar{a}_2}[(\dot{f} + fa_1 + f\bar{a}_1)x + fa_2 y])^T$ *является ОФ системы (1).*

2^0. *Если же* $a_2 \equiv 0$ *и*

$$\begin{cases} fa_3 + f^2\bar{a}_3 + f\bar{a}_4 g_1 + \bar{a}_5 g_1^2 = 0; \\ fa_4 + f\bar{a}_4 g_2 + 2\bar{a}_5 g_1 g_2 = 0; fa_5 + \bar{a}_5 g_2^2 = 0; \\ g_1 a_3 + g_2 b_3 + f^2\bar{b}_3 + \bar{b}_4 f g_1 + \bar{b}_5 g_1^2 = 0; \\ a_4 g_1 + g_2 b_4 + f g_2\bar{b}_4 + 2g_1 g_2\bar{b}_5 = 0; \\ a_5 g_1 + b_5 g_2 + g_2^2\bar{b}_5 = 0, \end{cases}$$

где $g_1 = -\exp\left(-\int\limits_0^t(a_1 + \bar{b}_2)d\tau\right)\int\limits_0^t\left[b_1\exp\left(\int\limits_0^\tau(a_1 - b_2)ds\right) + \bar{b}_1\exp\left(\int\limits_0^\tau(\bar{b}_2 - \bar{a}_1)ds\right)\right]d\tau$,

$g_2 = \exp\left(-\int\limits_0^t(b_2 + \bar{b}_2)d\tau\right)$, $f = \exp\left(-\int\limits_0^t(a_1 + \bar{a}_1)d\tau\right)$, *то* $F(t,x,y) = (fx, g_1 x + g_2 y)^T$ *является ОФ системы (1). При этом если система (1)* 2ω*-периодическая, и* $F(-\omega,x,y) = (x,y)^T$, *то всякое продолжение на* $[-\omega,\omega]$ *решение системы (1) будет* 2ω*-периодическим.*

Доказательство. При $a_2 \neq 0$ из условия (8) следует

$$\left[(\dot{f} + fa_1 + f\bar{a}_1)x + fa_2 y + \bar{a}_2\bar{y}\right]' \equiv 0. \tag{9}$$

Используя условие (2) получим

$$\bar{y} = -\frac{1}{\bar{a}_2}\left[(\dot{f} + fa_1 + f\bar{a}_1)x + fa_2 y\right].$$

Отсюда следует $(fx - \bar{x})' \equiv 0$, и из $f(0) = 1$ следует $\bar{x} = fx$. Так что $F(0,x,y) = (x,y)^T$ и

$$F_t(t,x,y)+F_x(t,x,y)\begin{pmatrix}P\\Q\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}P(-t,F_1,F_2)\\Q(-t,F_1,F_2)\end{pmatrix}=0,$$

где $F_1(t,x,y)=\bar{x}, F_2(t,x,y)=\bar{y}$, т.е. при $a_2\neq 0$ теорема доказана [1,с.11].

При $a_2\equiv 0$ теорема доказывается аналогично.

Пример 1. Дифференциальная система

$$\begin{cases}\dot{x}=a_1x+\sin t e^{\sin t}y+a_2x^2+a_3e^{\sin t}xy+a_4e^{2\sin t}y^2\\ \dot{y}=b_1e^{-\sin t}x+(b_2-\cos t)y+b_3e^{-\sin t}x^2+b_4xy\end{cases},$$

($a_i,b_i,i=\overline{1,4}$ – непрерывно дифференцируемые нечетные функции на **R**), имеет ОФ $F(t,x,y)=(x,e^{2\sin t}y)^T$. Если $a_i(t+2\pi)=a_i(t), b_i(t+2\pi)=b_i(t), i=\overline{1,4}$, то всякое продолжение на $[-\pi,\pi]$ решение этой системы будет 2π-периодическим.

При $a_5\equiv 0$ и $a_4\neq 0$ аналогично получим следующие результаты.

Теорема 3. *Пусть* $a_5\equiv 0$ *и* $a_4\neq 0$. *Тогда*

1^0. *Если* $a_2\neq 0$ *и*

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{\bar{a}_2+\bar{a}_4fx}\left[(\dot{f}+fa_1+f\bar{a}_1)x+(fa_3+f^2\bar{a}_3)x^2+f(a_2+a_4x)y\right]=-y \quad \textit{и}$$

$$\begin{cases}\bar{a}_2(\dot{\varphi}+\varphi^2)+(2\bar{a}_2a_1+\bar{c}_2)\varphi=\bar{a}_2(\bar{c}_1-c_1)-\bar{c}_2(a_1+\bar{a}_1);\\ a_3^2+a_3b_4-a_4b_3=f^2(\bar{a}_3^2+\bar{a}_3\bar{b}_4-\bar{a}_4\bar{b}_3);\\ \bar{a}_2a_4(3\bar{a}_3+\bar{b}_4)+a_2\bar{a}_4(3a_3+b_4)=a_4\bar{c}_4+\bar{a}_4c_4+2a_4\bar{a}_4\varphi;\\ 2a_3\bar{a}_4\varphi+\bar{a}_4c_3+a_3\bar{c}_4+\bar{a}_2(\bar{a}_3b_4-a_3\bar{b}_4)=f(\bar{a}_4\bar{c}_3-\bar{a}_3\bar{c}_4)+\bar{a}_4(3a_3+b_4)\varphi^*;\\ a_2\bar{a}_2(a_2c_3-a_3c_2)+\bar{a}_2\varphi^*(a_4c_2-a_2c_4)=a_2^2(\bar{a}_2\bar{c}_3-\bar{a}_3\bar{c}_2)f;\\ fa_2^2(\bar{a}_2\bar{c}_4-\bar{a}_4\bar{c}_2)+\bar{a}_2^2(a_2c_4-a_4c_2)=0;\\ 3a_3+b_4+f(3\bar{a}_3+\bar{b}_4)=0; a_4+b_5=0;\end{cases}$$

или

$$\begin{cases}\bar{a}_2(\dot{\varphi}+\varphi^2)+(2\bar{a}_2a_1+\bar{c}_2)\varphi=\bar{a}_2(\bar{c}_1-c_1)-\bar{c}_2(a_1+\bar{a}_1);\\ a_2\bar{a}_4(a_3+b_4)+a_4\bar{a}_2(\bar{a}_3+\bar{b}_4)=2(a_3a_2\bar{b}_5+\bar{a}_2\bar{a}_3b_5);\\ a_2(a_4\bar{a}_4b_3+a_3^2\bar{b}_5-a_3\bar{a}_4b_4)=\bar{a}_2f(a_4\bar{a}_4\bar{b}_3+\bar{a}_3^2b_5-\bar{a}_3\bar{b}_4a_4);\\ \bar{a}_2(a_2c_3-a_3c_2)-a_4\bar{c}_2\varphi^*=a_2f(\bar{a}_2\bar{c}_3-\bar{a}_3\bar{c}_2-\bar{c}_4\varphi^*)+\bar{a}_2(a_4+b_5)\varphi^{*2};\\ a_2\bar{a}_4(2a_3^2+a_4b_3)+\bar{a}_4(a_4c_3-a_3c_4)=\\ =f\left[a_4\bar{a}_2(2\bar{a}_3^2+\bar{a}_4\bar{b}_3)+a_4(\bar{a}_4\bar{c}_3-\bar{a}_3\bar{c}_4)+\bar{a}_4\varphi^*(2\bar{a}_3b_5-a_4\bar{a}_3-3a_4\bar{b}_4)\right];\\ 2a_4\bar{a}_4\varphi+\bar{a}_4c_4+a_4\bar{c}_4=2\bar{a}_4(a_4+b_5)\varphi^*;\\ f\bar{a}_4a_2=\bar{a}_2a_4;\bar{a}_4b_5=a_4\bar{b}_5;\end{cases}$$

где $c_1=\dot{a}_1+a_1^2+a_2b_1$, $c_2=\dot{a}_2+a_1a_2+a_2b_2$, $c_3=\dot{a}_3+3a_3a_1+a_2b_3+a_4b_1$,

$c_4=\dot{a}_4+2a_1a_4+2a_3a_2+a_2b_4+a_4b_2$, $f=\exp\int_0^\tau\varphi(\tau)d\tau$, $\varphi=-\frac{1}{2}\left(\frac{c_2}{a_2}+\frac{\bar{c}_2}{\bar{a}_2}\right)$,

$\varphi^*=\varphi+a_1+\bar{a}_1$, *то*

$$F(t,x,y)=\left(fx,\frac{(\dot f+fa_1+f\bar a_1)x+(fa_3+f^2\bar a_3)x^2+f(a_2+a_4x)y}{-(\bar a_2+\bar a_4fx)}\right)^T$$

является ОФ системы (1).

2^0. *Если* $a_2\equiv 0$ *и*

$$\begin{cases}a_3+f\bar a_3+\bar a_4g_1=0;a_4+\bar a_4g_2=0;\\ a_3g_1+b_3g_2+f^2\bar b_3+\bar b_4fg_1+\bar b_5g_1^2=0;\\ a_4g_1+b_4g_2+f\bar b_4g_2+2\bar b_5g_1g_2=0;b_5+\bar b_5g_2=0;\end{cases}$$

где $g_1=-\left(\exp\left(-\int_0^t(a_1+\bar b_2)d\tau\right)\right)\int_0^t\left(b_1\exp\left(\int_0^\tau(a_1-b_2)ds\right)+\bar b_1\exp\left(\int_0^\tau(\bar b_2-\bar a_1)ds\right)\right)d\tau,$

$g_2=\exp\left(-\int_0^t(b_2+\bar b_2)d\tau\right)$, $f=\exp\left(-\int_0^t(a_1+\bar a_1)d\tau\right)$, *то* $F(t,x,y)=(fx,g_1x+g_2y)^T$

является ОФ системы (1). При этом если система (1) 2ω*-периодическая и* $F(-\omega,x,y)=(x,y)^T$, *то всякое продолжение на* $[-\omega,\omega]$ *решения системы (1) будет* 2ω*-периодическим.*

Пример 2. Дифференциальная система

$$\begin{cases}\dot x=\sin te^{\sin t}y+\frac{1}{2}\sin^2 tx^2+\alpha_1(t)\sin te^{\sin t}xy,\\ \dot y=\alpha_2(t)e^{-\sin t}x+(\alpha_3(t)-\cos t)y+\alpha_4(t)x^2-\frac{3}{2}\sin^2 txy-\alpha_1(t)\sin te^{\sin t}y^2,\end{cases}$$

имеет нелинейную ОФ вида

$$F(t,x,y)=\left(x,\frac{1}{1-\alpha_1(t)x}\left[\sin te^{\sin t}x^2+(1+\alpha_1(t)x)e^{2\sin t}y\right]\right)^T,$$

где $\alpha_1(t)=\frac{t}{4}-\frac{1}{8}\sin 2t$, $\alpha_2(t);\alpha_3(t)$ – нечетные дифференцируемые функции,

$\alpha_4(t)=\left(\frac{1}{2}\alpha_3(t)\sin t-\frac{1}{2}\cos t-\alpha_1(t)\alpha_2(t)\right)e^{-\sin t}$.

Теорема 4. *Пусть* $a_5=a_4\equiv 0$ *и* $a_2\neq 0$ *и* $\lim\limits_{t\to 0}\frac{a_2(t)}{a_2(-t)}=-1$. *Тогда*

1^0. *Если* $b_5\equiv 0$, $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\dot f+fa_1+f\bar a_1+(fa_3+f^2\bar a_3)x}{a_2(-t)}=0$ *и*

$$\begin{cases}\bar a_2(\dot\varphi+\varphi^2)+(2\bar a_2a_1+\bar c_2)\varphi=\bar a_2(\bar c_1-c_1)-\bar c_2(a_1+\bar a_1);\\ a_2\bar a_2[\dot a_3+a_2b_3+a_3a_1-2\bar a_1a_3]+a_3a_2\bar c_2=\\ =f[a_2\bar a_2(\dot{\bar a}_3+\bar a_2\bar b_3+\bar a_3\bar a_1-2a_1\bar a_3)+\bar a_3\bar a_2c_2];\\ 2a_3+\bar b_4f=0;\end{cases}$$

(функции c_1,c_2,f,φ *определяются как и в формулировке теоремы 3), то*

$$F(t,x,y)=\left(fx,-\frac{1}{\bar a_2}\left[(\dot f+fa_1+f\bar a_1)x+(fa_3+f^2\bar a_3)x^2+fa_2y\right]\right)^T$$

является ОФ системы (1).

2^0. *Если* $b_5 \neq 0$ *и* $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\dot{f} + fa_1 + f\bar{a}_1}{a_2(-t)} = 0$ *и*

$$\begin{cases} \bar{a}_2(\dot{\varphi} + \varphi^2) + (2\bar{a}_2 a_1 + \bar{c}_2)\varphi = \bar{a}_2(\bar{c}_1 - c_1) - \bar{c}_2(a_1 + \bar{a}_1); \\ (a_3 - b_4)\varphi^* + 2a_2 b_3 = \left[(\bar{a}_3 - \bar{b}_4)\varphi^* + 2\bar{a}_2\bar{b}_3\right]f; \\ a_2(b_4 + f\bar{b}_4) = 2b_5\varphi^*; a_3 + f\bar{a}_3 = 0; \bar{a}_2 b_5 = fa_2\bar{b}_5; \end{cases}$$

(функции $c_1, c_2, f, \varphi, \varphi^*$ *определяются как и в теореме 3), то*

$$F(t,x,y) = \left(fx, -\frac{1}{\bar{a}_2}\left[\left(\dot{f} + fa_1 + f\bar{a}_1\right)x + fa_2 y\right]\right)^T$$

является ОФ системы (1). При этом если система (1) 2ω*-периодическая и* $F(-\omega, x, y) = (x, y)^T$, *то всякое продолжение на* $[-\omega, \omega]$ *решения системы (1) будет* 2ω*-периодическим.*

Пример 3. Дифференциальная система

$$\begin{cases} \dot{x} = \sin t e^{\sin t} y + \sin t e^{\sin t} x^2 \\ \dot{y} = \alpha(t) e^{-\sin t} x - \cos t y + \left(\beta(t) e^{-\sin t} - \cos t\right)x^2 + 2\sin t e^{-\sin t} xy \end{cases}$$

имеет ОФ $F(t,x,y) = \left(x, e^{2\sin t} y + \left(e^{2\sin t} - 1\right)x^2\right)^T$, где $\alpha(t) + \alpha(-t) = 0$, $\beta(t) + \beta(-t) = 0$ и непрерывно дифференцируемые. Если $\alpha(t + 2\pi) = \alpha(t)$, $\beta(t + 2\pi) = \beta(t)$, то всякое продолжимое на $[-\pi, \pi]$ решение этой системы будет 2π-периодическим.

Очевидно для системы (1) при $a_2 = a_4 = a_5 = 0$ и $\dot{f} + fa_1 + f\bar{a}_1 = 0$, $a_3 + \bar{a}_3 f = 0$. Тогда первая компонента ОФ этой системы всегда имеет вид $\bar{x} = f(t)x$.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Мироненко В.И.*** Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений. Минск: Изд-во "Университетское", 1986.
2. ***Альсевич Л.А.*** О системах с линейной диагональной отражающей функцией // Доклады АН БССР, 1983. Т. 27, № 1. С. 5-8.
3. ***Альсевич Л.А.*** О линейных системах с треугольной отражающей функцией // Дифференциальные уравнения, 1983. Т.19, № 8. С. 1441-1449.

SUMMARY

The nessesary and sufficient conditions for the independance of reflective function (RF) of the second component of a quadratic system are given. Under this conditions the form of the RF is established. The conditions under wich RF has a form $F(t,x,y) = (f(t)x, g_0(t,x) + g_1(t,x))^T$ *are given.*