

О поведении на бесконечности решений некоторых нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений

Рассматривается уравнение

$$v'' - c_1(v^{\frac{\lambda}{\alpha}})' - c_2 v^{\frac{\beta}{\alpha}} = 0. \quad (1.1)$$

где $\alpha, \beta, \lambda, c_1, c_2$ – некоторые положительные постоянные. Для уравнения (1.1) будем решать задачу Коши с начальными условиями следующего вида:

$$v(0) = m > 0, \quad v'(0) = 0. \quad (1.2)$$

Целью настоящей работы является исследование решений задачи (1.1), (1.2) при различных соотношениях параметров α, β, λ . В [1] рассмотрен случай $\lambda > \max(\alpha, \beta)$ для уравнения (1.1) с $c_1 < 0$, а также доказана локальная разрешимость задачи (1.1), (1.2). Возможность продолжения решения на всю положительную полуось вытекает из априорных оценок решений сверху, которые будут установлены ниже. Аналогично тому, как это сделано в [1], можно доказать, что для решения задачи (1.1), (1.2) справедливы неравенства

$$v'(x) > 0, \quad v(x) > m \quad \text{при } x > 0. \quad (1.3)$$

Необходимость исследования уравнений вида (1.1) возникает при изучении вопроса о существовании решений задачи Коши с растущими на бесконечности начальными функциями для уравнения

$$u_t = (u^\alpha)_{xx} - c_1(u^\lambda)_x - c_2 u^\beta, \quad (1.4)$$

где $\alpha, \beta, \lambda, c_1, c_2$ – некоторые положительные постоянные. Уравнение (1.4) возникает, например, при описании процессов распространения тепла в нелинейной среде и диффузии жидкостей и газов. Очевидно, функция $u(x) = [v(x)]^{\frac{1}{\alpha}}$, где $v(x)$ – некоторое решение уравнения (1.1), является стационарным решением уравнения (1.4). Для удобства ссылок на данную работу при исследовании уравнения (1.4) в (1.1) не делается переобозначение степеней.

Введем несколько определений, которые будут использоваться в дальнейшем.

Определение 1. Две положительные функции $\phi(x)$ и $\psi(x)$, определенные при $x > 0$, будем называть эквивалентными при $x \rightarrow +\infty$ и писать $\phi \equiv \psi$, если

$$\frac{\phi(x)}{\psi(x)} \rightarrow 1 \quad \text{при } x \rightarrow +\infty.$$

Определение 2. Функцию $\delta_1(x)$ будем называть первым членом асимптотики решения $v(x)$ задачи (1.1), (1.2), если $v(x) \equiv \delta_1(x)$.

Определение 3. Функцию $\delta_2(x)$ будем называть вторым членом асимптотики решения $v(x)$ задачи (1.1), (1.2), если $(v(x) - \delta_1(x)) \equiv \delta_2(x)$.

Поведение при $x \rightarrow +\infty$ решений задачи (1.1), (1.2).

Теорема 1. Пусть $\alpha > \lambda$ и $\lambda > \frac{\alpha + \beta}{2}$. Тогда для решения задачи (1.1), (1.2) справедлива следующая асимптотическая формула:

$$v(x) \cong \left(\frac{(\alpha - \lambda)c_1}{\alpha} x \right)^{\frac{\alpha}{\alpha - \lambda}}. \quad (2.1)$$

Доказательство: Путем введения новой переменной $f(v) = v'(x) \cdot v^{\frac{\lambda}{\alpha}}$, мы приходим к задаче

$$f' = (c_1 - f) \frac{\lambda}{\alpha} v^{-1} + \frac{c_2}{f} v^{\frac{\beta - 2\lambda}{\alpha}} = L(v, f), \quad (2.2)$$

$$f(m) = 0. \quad (2.3)$$

причем вследствие (1.3) $f(v) > 0$ при $v > m$. Исследуем поведение решения задачи (2.2), (2.3) при $v \rightarrow +\infty$. Покажем, что

$$f(v) \rightarrow c_1 \text{ при } v \rightarrow +\infty. \quad (2.4)$$

Возможны два случая: либо $f(v)$ все время меньше c_1 , либо существует такое значение аргумента, что $f(v_0) = c_1$. Рассмотрим оба эти случая.

1) Предположим сначала, что

$$f(v) < c_1 \text{ для всех } v \geq m. \quad (2.5)$$

Тогда в силу (2.2) $f'(v) > 0$ для всех $v > m$. Поэтому функция $f(v)$ монотонно возрастает и ограничена сверху, следовательно, она имеет предел. Предположим, $\lim_{v \rightarrow +\infty} f(v) = b_1 < c_1$. Тогда

$$f(v) \leq b_1 < c_1 \text{ для всех } v \geq m. \quad (2.6)$$

Отсюда и из (2.2) находим, что

$$f' > (c_1 - b_1) \frac{\lambda}{\alpha} v^{-1} + \frac{c_2}{f} v^{\frac{\beta - 2\lambda}{\alpha}} > (c_1 - b_1) \frac{\lambda}{\alpha} v^{-1}. \quad (2.7)$$

Интегрируя (2.7) по отрезку $[m; v]$, приходим к соотношению

$$f(v) > (c_1 - b_1) \frac{\lambda}{\alpha} \ln \frac{v}{m}, \quad (2.8)$$

что противоречит (2.6), так как правая часть (2.8) неограниченно возрастает при $v \rightarrow +\infty$. Таким образом, справедлива асимптотическая формула (2.4).

2) Если (2.5) не выполняется, то существует такое значение аргумента v_0 , что $f(v_0) = c_1$. Как легко видеть из (2.2), $f'(v) > 0$ во всех точках v , где $f(v) = c_1$. Отсюда

$$f(v) > c_1 \text{ при } v > v_0. \quad (2.9)$$

Покажем, что и в этом случае верна формула (2.4). Предположим, что при достаточно больших значениях аргумента $v \geq v_1$

$$f(v) \geq b_2 > c_1. \quad (2.10)$$

Отсюда и из уравнения (2.2) находим, что

$$f' < (c_1 - b_2) \frac{\lambda}{\alpha} v^{-1} + \frac{c_2}{b_2} v^{\frac{\beta - 2\lambda}{\alpha}}. \quad (2.11)$$

Так как в силу условия теоремы $-1 > \frac{\beta - 2\lambda}{\alpha}$, для достаточно большого v_2 и некоторого $d > 0$ имеем

$$f' \leq -dv^{-1}, \quad v \geq v_2. \quad (2.12)$$

Интегрированием (2.12) по отрезку $[v_3, v]$, где $v_3 = \max(v_1, v_2)$, получим

$$f(v) \leq f(v_3) - d \ln \frac{v}{v_3}. \quad (2.13)$$

Очевидно, (2.13) и (2.10) противоречат друг другу. Таким образом, (2.10) неверно, и для всех $b_2 > c_1$ найдется такое значение v_4 , что

$$c_1 < f(v_4) < b_2. \quad (2.14)$$

Покажем, что при $v \geq v_4$ $c_1 < f(v) < b_2$. Для этого сравним при $v \geq v_4$ функцию $f(v)$ с функцией $g(v) \equiv b_2$. Для достаточно большого значения v_5

$$g' > L(v, g) \quad \text{при } v \geq v_5. \quad (2.15)$$

Из (2.2), (2.9), (2.14), (2.15) по теореме сравнения Чаплыгина [2] получаем, что $c_1 < f(v) < b_2$ при $v \geq v_5$. Вследствие произвольности b_2 опять справедливо соотношение (2.4).

Из (2.4) и определения функции $f(v)$ выводим равенство

$$v'(x) = (c_1 + \gamma(v))v^{\frac{\lambda}{\alpha}}, \quad (2.16)$$

где $\gamma(v)$ – бесконечно малая при $v \rightarrow +\infty$ функция. Далее, применяя (2.16) и формулу среднего значения для определенных интегралов, получаем

$$x - a = \int_{v(a)}^{v(x)} \frac{dv}{v'(x)} = \frac{\alpha}{(\alpha - \lambda)(c_1 + \gamma(\xi))} ([v(x)]^{\frac{\alpha - \lambda}{\alpha}} - [v(a)]^{\frac{\alpha - \lambda}{\alpha}}) \quad (2.17)$$

Здесь $v(a) \leq \xi \leq v(x)$. Выражая из (2.17) $v(x)$, находим

$$v(x) = \left(\frac{(\alpha - \lambda)(c_1 + \gamma(\xi))}{\alpha} (x - a) + [v(a)]^{\frac{\alpha - \lambda}{\alpha}} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha - \lambda}},$$

откуда вытекает асимптотическая формула (2.1). Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть $\alpha > \lambda$, $\lambda > \frac{\alpha + \beta}{2}$, $2\alpha + \beta - 3\lambda > 0$. Тогда второй член асимптотики решения задачи (1.1), (1.2) описывается формулой:

$$\delta_2(x) = \frac{c_2 \alpha^2}{c_1^2 (2\alpha + \beta - 3\lambda)(\alpha + \beta - \lambda)} \left(\frac{c_1(\alpha - \lambda)}{\alpha} x \right)^{\frac{2\alpha + \beta - 2\lambda}{\alpha - \lambda}}. \quad (2.18)$$

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 1, перейдем к рассмотрению функции $f(v)$, определяемой соотношениями (2.2), (2.3). Сде-

лав в (2.2) замену переменной $f(v) = c_1 + \varphi(v)v^{\frac{\alpha + \beta - 2\lambda}{\alpha}}$, приходим к задаче

$$\varphi' = \left(-\frac{\alpha + \beta - \lambda}{\alpha} \cdot \varphi + \frac{c_2}{c_1 + \varphi v^{\frac{\alpha + \beta - 2\lambda}{\alpha}}} \right) v^{-1} \equiv P(\varphi, v), \quad (2.19)$$

$$\varphi(m) = -c_1 m^{\frac{2\lambda - \alpha - \beta}{\alpha}}. \quad (2.20)$$

Обозначим $b_0 = \frac{c_2 \alpha}{c_1(\alpha + \beta - \lambda)}$. Покажем, что

$$\varphi(v) \rightarrow b_0 \text{ при } v \rightarrow +\infty. \quad (2.21)$$

Если $\varphi(v) < b_0$ для всех $v > m$, то доказательство (2.21) аналогично доказательству (2.4) в теореме 1. Предположим теперь, что существует такое наименьшее значение аргумента v_5 , что $\varphi(v_5) = b_0$. Так как $b_0 > 0$ и $\varphi(m) < 0$, то $\varphi(v) < \varphi(v_5)$ при $v < v_5$ и $\varphi'(v_5) \geq 0$. Однако из (2.19) следует, что в точке v_5 $\varphi'(v_5) < 0$. Полученное противоречие показывает, что данный случай не имеет места.

Таким образом, справедливость (2.21) доказана, и имеют место равенства

$$\varphi(v) = b_0 + \eta(v),$$

$$v'(x) = c_1 v^{\frac{\lambda}{\alpha}} + b_0 v^{\frac{\alpha + \beta - \lambda}{\alpha}} + o(v^{\frac{\alpha + \beta - \lambda}{\alpha}}) \quad (2.22)$$

где $\eta(v)$ – бесконечно малая функция при $v \rightarrow +\infty$. Интегрируя (2.22) по отрезку $[0, x]$ и применяя свойства бесконечно малых функций, получим:

$$\begin{aligned} x - a &= \frac{1}{c_1} \int_m^{v(x)} v^{\frac{\lambda}{\alpha}} \left(1 + \frac{b_0}{c_1} v^{\frac{\alpha + \beta - 2\lambda}{\alpha}} + o(v^{\frac{\alpha + \beta - 2\lambda}{\alpha}}) \right)^{-1} dv = \\ &= \frac{1}{c_1} \int_m^{v(x)} v^{\frac{\lambda}{\alpha}} \left(1 - \frac{b_0}{c_1} v^{\frac{\alpha + \beta - 2\lambda}{\alpha}} + o(v^{\frac{\alpha + \beta - 2\lambda}{\alpha}}) \right) dv. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Отсюда

$$x = \frac{\alpha}{c_1(\alpha - \lambda)} [v(x)]^{\frac{\alpha - \lambda}{\alpha}} - \frac{b_0 \alpha}{c_1^2(2\alpha + \beta - 3\lambda)} [v(x)]^{\frac{2\alpha + \beta - 3\lambda}{\alpha}} + o(v^{\frac{2\alpha + \beta - 3\lambda}{\alpha}}) + h_1 \quad (2.24)$$

$$\text{где } h_1 = -\frac{\alpha}{c_1(\alpha - \lambda)} m^{\frac{\alpha - \lambda}{\alpha}} + \frac{b_0 \alpha}{c_1^2(2\alpha + \beta - 3\lambda)} m^{\frac{2\alpha + \beta - 3\lambda}{\alpha}}.$$

Умножив обе части (2.24) на $\frac{c_1(\alpha - \lambda)}{\alpha}$ и возведя в степень $\frac{\alpha}{\alpha - \lambda}$, получим

$$\left(\frac{c_1(\alpha - \lambda)}{\alpha} (x - h_1) \right)^{\frac{\alpha}{\alpha - \lambda}} = v \left(1 - \frac{b_0(\alpha - \lambda)}{c_1(2\alpha + \beta - 3\lambda)} v^{\frac{\alpha + \beta - 2\lambda}{\alpha}} + o(v^{\frac{\alpha + \beta - 2\lambda}{\alpha}}) \right)^{\frac{\alpha}{\alpha - \lambda}} \quad (2.25)$$

Разлагая обе части (2.25) в биномиальный ряд, находим

$$\delta_1(x) - \frac{\alpha h_1}{\alpha - \lambda} \left(\frac{c_1(\alpha - \lambda)}{\alpha} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha - \lambda}} x^{\frac{\lambda}{\alpha - \lambda}} + o(x^{\frac{\lambda}{\alpha - \lambda}}) = v - \frac{b_0 \alpha}{c_1(2\alpha + \beta - 3\lambda)} v^{\frac{2\alpha + \beta - 2\lambda}{\alpha}} + o(v^{\frac{2\alpha + \beta - 2\lambda}{\alpha}}),$$

откуда следует (2.18). Теорема доказана.

Теорема 3. Пусть $\alpha > \lambda$, $\lambda > \frac{\alpha + \beta}{2}$, $2\alpha + \beta - 3\lambda < 0$. Тогда второй член асимптотики решения задачи (1.1), (1.2) описывается формулой:

$$\delta_2(x) = cx^{\frac{\lambda}{\alpha-\lambda}}, \quad (2.26)$$

где c – некоторая постоянная, зависящая от $\alpha, \beta, \lambda, c_1, c_2$.

Теорема 4. Пусть $\alpha > \lambda$, $\lambda > \frac{\alpha+\beta}{2}$, $2\alpha + \beta - 3\lambda = 0$. Тогда второй член асимптотики решения задачи (1.1), (1.2) описывается формулой:

$$\delta_2(x) = \frac{b_0 \alpha}{c_1(\alpha - \lambda)} \left(\frac{c_1(\alpha - \lambda)}{\alpha} x \right)^{\frac{\lambda}{\alpha-\lambda}} \cdot \ln x, \quad (2.27)$$

Доказательства теорем 3 и 4 аналогичны доказательству теоремы 2.

Для других случаев соотношения параметров α, β, λ , когда первый член асимптотики решения есть степенная функция, имеют место теоремы 5 и 6.

Теорема 5. Пусть $\alpha > \beta$, $\lambda < \frac{\alpha+\beta}{2}$. Тогда для решения задачи (1.1), (1.2) справедливы следующие асимптотические формулы:

$$\begin{aligned} \delta_1(x) &= \left(\frac{\alpha - \beta}{2\alpha} \sqrt{\frac{2c_2\alpha}{\alpha + \beta}} x \right)^{\frac{2\alpha}{\alpha-\beta}}, \\ \delta_2(x) &= \frac{2c_1\lambda\alpha}{(\alpha + \beta + 2\lambda)(\lambda - \beta)} \sqrt{\frac{\alpha + \beta}{2c_2\alpha}} \left(\frac{\alpha - \beta}{2\alpha} \sqrt{\frac{2c_2\alpha}{\alpha + \beta}} x \right)^{\frac{2\lambda + \alpha - \beta}{\alpha-\beta}} \quad \text{при } \lambda > \beta, \\ \delta_2(x) &= \frac{4c_1\lambda\alpha}{(\alpha + \beta + 2\lambda)(\alpha - \beta)} \sqrt{\frac{\alpha + \beta}{2c_2\alpha}} \left(\frac{\alpha - \beta}{2\alpha} \sqrt{\frac{2c_2\alpha}{\alpha + \beta}} x \right)^{\frac{\alpha + \beta}{\alpha-\beta}} \cdot \ln x \quad \text{при } \lambda = \beta, \\ \delta_2(x) &= cx^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}} \quad \text{при } \lambda < \beta, \end{aligned}$$

где c – некоторая постоянная, зависящая от $\alpha, \beta, \lambda, c_1, c_2$.

Теорема 6. Пусть $\alpha > \beta$, $\lambda = \frac{\alpha+\beta}{2}$. Тогда для решения задачи (1.1), (1.2) справедливы следующие асимптотические формулы:

$$\begin{aligned} \delta_1(x) &= \left(\frac{s_1(\alpha - \beta)}{2\alpha} x \right)^{\frac{2\alpha}{\alpha-\beta}}, \\ \delta_2(x) &= cx^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}}, \end{aligned}$$

где s_1 – положительный корень квадратного уравнения $x^2 - c_1x - \frac{2c_2\alpha}{\alpha + \beta} = 0$,

c – некоторая постоянная, зависящая от $\alpha, \beta, \lambda, c_1, c_2$.

Первый член асимптотики может быть и показательной функцией.

Теорема 7. Пусть $\lambda = \alpha$, $\alpha > \beta$. Тогда для решения задачи (1.1), (1.2) справедлива следующая асимптотическая формула:

$$v(x) \cong Ae^{c_1x}, \quad (2.28)$$

где A – некоторая положительная константа.

Доказательство: Обозначив $\frac{\beta}{\alpha} = p$ и сделав в (1.1) замену неизвестной функции $f(x) = v(x)e^{-c_1x}$, задачу (1.1), (1.2) можно переписать в виде:

$$f'' + c_1 f' - c_2 f^p e^{(p-1)c_1x} = 0, \quad (2.29)$$

$$f(0) = m, \quad f'(0) = -c_1 m. \quad (2.30)$$

Покажем, что $f(x)$ стремится к некоторой положительной константе A при $x \rightarrow +\infty$.

Так как начальное значение производной меньше нуля, то возможны два случая: либо производная отрицательна на всей положительной полуоси, либо существует такое значение аргумента, в которой она станет равной нулю. Рассмотрим оба эти случая.

1) Пусть $f'(x) < 0$ для всех $x > 0$. Функция $f(x) = v(x)e^{-c_1x}$ положительна, так как $v(x) > m > 0$. Таким образом, $f(x)$ монотонно убывает и ограничена снизу, следовательно, существует $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \geq 0$. Покажем, что $A \neq 0$. Рассмотрим при $x \geq \delta > 0$ функцию $g(x)$, являющуюся решением задачи

$$\begin{aligned} g'' - c_1 g' &= 0, \\ g(\delta) &= v(\delta) = a > m, \quad g'(\delta) = v'(\delta) = \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

Функция $g(x)$ выписывается в явном виде $g(x) = a - \frac{\varepsilon}{c_1} + \frac{\varepsilon}{c_1} e^{-c_1\delta} e^{c_1x}$. По теореме сравнения для уравнений второго порядка [3] $v(x) > g(x)$, откуда

$$A = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{v(x)}{e^{c_1x}} \geq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{e^{c_1x}} = \frac{\varepsilon}{c_1} e^{-c_1\delta} > 0.$$

2) Пусть теперь существует такое значение x_0 , что $f'(x_0) = 0$. Аналогично (1.3) можно показать, что $f'(x) > 0$ для всех $x > x_0$. Тогда для всех $x > x_0$ верно

$$f'' = c_2 f^p e^{(p-1)c_1x} - c_1 f' < c_2 f^p. \quad (2.31)$$

Умножая обе части (2.31) на $f'(x) > 0$ и интегрируя в пределах от x_0 до x , получим $\frac{[f'(x)]^2}{2} < \frac{c_2}{p+1} ([f(x)]^{p+1} - [f(x_0)]^{p+1}) < \frac{c_2}{p+1} [f(x)]^{p+1}$, откуда

$$f' < \sqrt{\frac{2c_2}{p+1}} f^{\frac{p+1}{2}}. \quad (2.32)$$

Вновь интегрируя (2.32) по отрезку $[x_0, x]$, получим

$$\frac{[f(x)]^{\frac{1-p}{2}} - [f(x_0)]^{\frac{1-p}{2}}}{\frac{1-p}{2}} < \sqrt{\frac{2c_2}{p+1}} (x - x_0),$$

откуда $f(x) < \left(\frac{1-p}{2} \sqrt{\frac{2c_2}{p+1}} (x - x_0) + [f(x_0)]^{\frac{1-p}{2}} \right)^{\frac{2}{1-p}}$. Таким образом, функция $f(x)$

растет на бесконечности не быстрее, чем степенная функция с показателем $\frac{2}{1-p}$. Тогда, начиная с некоторого значения x_1 , будет выполняться неравенство

$$c_2 f^p e^{(p-1)c_1 x} < e^{\frac{(p-1)}{2} c_1 x} \quad \text{при } x > x_1. \quad (2.33)$$

Из (2.29) и (2.33) следует, что при $x > x_1$ выполняется $f'' + c_1 f' < e^{\frac{(p-1)}{2} c_1 x}$, откуда

$$f(x) < D_1 + D_2 e^{-c_1 x} + D_3 e^{\frac{(p-1)}{2} c_1 x}, \quad (2.34)$$

где D_1, D_2, D_3 – некоторые постоянные. Так как $p-1 < 0$, то правая часть (2.34) ограничена сверху на $[x_1, +\infty)$, поэтому $f(x)$ также ограничена сверху на $[x_0, +\infty)$.

Таким образом, вследствие монотонного возрастания $f(x)$ на $[x_0, +\infty)$ и ограниченности $f(x)$ сверху существует $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A > 0$, откуда и следует утверждение теоремы.

Теорема 8. Пусть $\beta = \alpha$, $\alpha > \lambda$. Тогда для решения задачи (1.1), (1.2) справедлива следующая асимптотическая формула:

$$v(x) \cong B e^{\sqrt{c_2} x},$$

где B – некоторая положительная константа.

Имеет также место

Теорема 9. Если $\beta > \alpha$ или $\lambda > \alpha$, то не существует решения задачи (1.1), (1.2) на всей положительной полуоси.

Доказательство: Докажем вначале справедливость утверждения теоремы при $\beta > \alpha$. Из (1.1) и (1.3) находим

$$v'' = c_1 (v^{\frac{\lambda}{\alpha}})' + c_2 v^{\frac{\beta}{\alpha}} > c_2 v^{\frac{\beta}{\alpha}}. \quad (2.35)$$

Умножая обе части (2.35) на v' ($v' > 0$) и интегрируя получившееся неравенство по отрезку $[0, x]$, получим

$$\frac{(v')^2}{2} > \frac{c_2 \alpha}{\alpha + \beta} (v^{\frac{\beta+\alpha}{\alpha}} - m^{\frac{\beta+\alpha}{\alpha}}). \quad (2.36)$$

Вследствие неограниченности $v(x)$, начиная с некоторого значения аргумента x_1 , выполняется неравенство

$$v^{\frac{\beta+\alpha}{\alpha}} - m^{\frac{\beta+\alpha}{\alpha}} > \frac{1}{2} v^{\frac{\beta+\alpha}{\alpha}}. \quad (2.37)$$

Подставляя (2.37) в (2.36) и преобразовывая, получим

$$v^{\frac{\beta+\alpha}{2\alpha}} v' > \sqrt{\frac{c_2 \alpha}{\alpha + \beta}} \quad \text{при } x > x_1 \quad (2.38)$$

Интегрируя (2.38) по отрезку $[x_1, x]$, находим

$$\frac{[v(x)]^{\frac{\alpha-\beta}{2\alpha}} - [v(x_1)]^{\frac{\alpha-\beta}{2\alpha}}}{\frac{\alpha-\beta}{2\alpha}} > \sqrt{\frac{c_2 \alpha}{\alpha + \beta}} (x - x_1),$$

откуда

$$v(x) > \left\{ \left(\frac{\beta - \alpha}{2\alpha} \right) \sqrt{\frac{c_2 \alpha}{\alpha + \beta}} x_1 + [v(x_1)]^{\frac{\alpha - \beta}{2\alpha}} - \left(\frac{\beta - \alpha}{2\alpha} \right) \sqrt{\frac{c_2 \alpha}{\alpha + \beta}} x \right\}^{-\frac{2\alpha}{\beta - \alpha}} = \frac{1}{(p - qx)^{\frac{2\alpha}{\beta - \alpha}}}, \quad (2.39)$$

где $p = \left(\frac{\beta - \alpha}{2\alpha} \right) \sqrt{\frac{c_2 \alpha}{\alpha + \beta}} x_1 + [v(x_1)]^{\frac{\alpha - \beta}{2\alpha}} > 0$, $q = \left(\frac{\beta - \alpha}{2\alpha} \right) \sqrt{\frac{c_2 \alpha}{\alpha + \beta}} > 0$. Правая часть (2.39) стремится к бесконечности при $x \rightarrow \frac{q}{p}$, что и доказывает утверждение теоремы.

Случай $\lambda > \alpha$ рассматривается аналогично.

Замечание. Задачу Коши (1.1), (1.2) можно решать не только вправо, но и влево, и исследовать асимптотическое поведение решений при $x \rightarrow -\infty$. Сделав замену переменной $\tilde{x} = -x$, мы придем к уравнению

$$v'' + c_1 (v^{\lambda/\alpha})' - c_2 v^{\beta/\alpha} = 0 \quad (2.40)$$

с такими же начальными условиями (1.2). Для решения задачи (2.40), (1.2) справедливы теоремы 5, 6 и 8, если в их формулировках заменить c_1 на $-c_1$, причем асимптотические формулы для $\delta_2(x)$ в теореме 5 будут справедливы

только при условии $\frac{2c_1^2 \lambda (\alpha + \beta - \lambda)}{c_2 \alpha (\alpha + \beta + 2\lambda)} < m^{\frac{2\lambda - \alpha - \beta}{2\alpha}}$, которое вытекает из доказательства.

При $\beta = \alpha$, $\alpha > \lambda$ для первого члена асимптотики мы получим показательную функцию $\delta_1(x) = Ce^{\sqrt{c_2}x}$, а при $\beta > \alpha$, $\beta > \lambda$ – «взрыв» решения при конечном значении аргумента.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гладков А.Л.** О стационарных решениях некоторых квазилинейных параболических уравнений // Вестник ВГУ, 1997. №1. С. 56-61.
2. **Богданов Ю.С., Мазаник С.А., Сыроид Ю.Б.** Курс дифференциальных уравнений. Мн., 1996.
3. **Гладков А.Л.** О задаче Коши в классах растущих функций для уравнения фильтрации с конвекцией // Математический сборник, 1995. Том 186. №6. С. 35-56.

S u m m a r y

We consider the nonlinear ordinary differential equation $v'' - c_1(v^n)' - c_2 v^p = 0$, where n, p, c_1, c_2 are positive constants, with the initial conditions $v(0) = m > 0$, $v'(0) = 0$. The asymptotical behavior of solutions of a Cauchy problem is investigated for various parities of parameters n and p . The first member of an asymptotics and in a number of cases the second member of an asymptotics is found. The Cauchy problem is investigated both for positive, and for negative values x .