УДК 512.542

В.В. Подгорная

Факторизации конечных групп дисперсивными и сверхразрешимыми подгруппами

Известно, что конечная группа G=HK с нормальными сверхразрешимыми подгруппами H и K не всегда является сверхразрешимой. Отсюда следует, что формация сверхразрешимых групп не является классом Фиттинга. Известны следующие случаи, ведущие к сверхразрешимости группы:

– подгруппы H и K имеют взаимно простые индексы,

– группа G имеет нильпотентный коммутант,

– подгруппы из H перестановочны со всеми подгруппами из K, а подгруппы из K перестановочны со всеми подгруппами из H [1-3].

Формационное развитие этих результатов содержится в [4].

В настоящей статье получена новая теорема, относящаяся к этому направлению. Будем рассматривать только конечные группы. Нам понадобятся следующие обозначения и определения.

Силовской полусистемой группы назовем множество силовских подгрупп, взятых по одной для каждого простого делителя порядка группы, вместе с единичной подгруппой. Таким образом, если G – группа порядка $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n}$, то множество $\Sigma=\{E, G_{p_1}, G_{p_2}, \ldots, G_{p_n}\}$, будет силовской полусистемой. Здесь E – единичная подгруппа, G_{p_i} – силовская p_i-подгруппа группы G и все числа $p_1, p_2, \ldots, p_n$ различны.

Из теоремы Силова следует, что каждая группа G обладает силовской полусистемой Σ. Если дополнительно $G_{p_i} G_{p_j} = G_{p_j} G_{p_i}$ для всех подгрупп из Σ, то силовскую полусистему Σ называют силовской системой [5,6]. Известно, что любая разрешимая группа обладает силовской системой, и наоборот, если в группе имеется силовская система, то группа разрешима [5].

Пусть θ – некоторое множество подгрупп группы G и N – нормальная подгруппа группы G. Воспользуемся следующими обозначениями:

$$\theta N = \{ XN \mid X\in\theta \},$$
$$\theta\cap N = \{ X\cap N \mid X\in\theta \},$$
$$\theta N/N = \{ XN/N \mid X\in\theta \}.$$

Подгруппа H группы G называется -квазинормальной, если HX=XH для всех X∈ . Остальные обозначения и определения можно найти в монографии [1].

Лемма 1. *Пусть* N – *нормальная подгруппа группы* G. *Если* Σ – *силовская полусистема группы* G, *то* $\Sigma N/N$ *и* $\Sigma \cap N$ *являются силовскими полусистемами факторгруппы* G/N *и подгруппы* N *соответственно.*

Доказательство вытекает из свойств силовских подгрупп.

Лемма 2. *Пусть* N – *нормальная подгруппа группы* G. *Если* A/N – *циклическая* p-*подгруппа факторгруппы* G/N, *то существует элемент* $h \in G$ *такой, что* $\langle h \rangle$ – p-*подгруппа и* $\langle h \rangle N = A$.

Доказательство. Пусть H – минимальное добавление к подгруппе N в группе A. Тогда $\pi(H)=\pi(A/N)$ по лемме 11.2[1]. Поэтому H является p-группой. Так как $H \cap N \subseteq \Phi(H)$ по лемме 11.1[1] и $A/N=HN/N \cong H/H\cap N$ циклическая, то H – циклическая подгруппа, т. е. $H \leq \langle h \rangle$ для некоторого $h \in A$. Лемма доказана.

Будем использовать запись Σ_G для обозначения некоторой силовской полусистемы конечной группы G.

Лемма 3. *Пусть группа* G=HK, *где подгруппы* H *и* K *дисперсивны по Оре. Если циклические примарные подгруппы из* H Σ_K-*квазинормальны и циклические примарные подгруппы из* K Σ_H-*квазинормальны, то группа* G *дисперсивна по Оре.*

Доказательство. Предположим, что лемма неверна. Тогда существуют группы, удовлетворяющие условию леммы и не удовлетворяющие её заключению. Пусть G – не дисперсивная по Оре группа наименьшего порядка, для которой все условия леммы выполняются. Тогда для любой неединичной нормальной подгруппы N факторгруппа G/N является произведением своих подгрупп HN/N и KN/N. Так как $HN/N \cong H/H\cap N$ и $KN/N \cong K/K\cap N$, то подгруппы HN/N и KN/N дисперсивны по Оре. Рассмотрим их силовские полусистемы. Ввиду леммы 1 силовские полусистемы подгрупп HN/N и KN/N соответственно равны множествам $\Sigma_H N/N$ и $\Sigma_K N/N$.

Пусть A/N – произвольная циклическая примарная подгруппа факторгруппы HN/N. Рассмотрим произведение циклической подгруппы A/N и произвольной силовской подгруппы $K_pN/N \in \Sigma_K N/N$. Ввиду леммы 2 существует примарный элемент $x \in G$ такой, что $A=\langle x \rangle N$. Поэтому $(A/N)(K_pN/N)=(AK_pN)/N=$ $=(\langle x \rangle NK_p)/N=(NK_p\langle x \rangle)/N=(K_pN/N)(\langle x \rangle N/N)=(K_pN/N)(A/N)$. Аналогично проверяется перестановочность циклических примарных подгрупп из KN/N с элементами силовской полусистемы $\Sigma_H N/N$. Таким образом, для факторгруппы G/N все условия леммы выполняются, а так как порядок факторгруппы G/N меньше порядка группы G, то по индукции факторгруппа G/N будет дисперсивна по Оре.

Пусть теперь p – наибольший простой делитель порядка группы G и H_p – силовская p-подгруппа подгруппы H. Так как H дисперсивна по Оре, то $H_p \triangleleft H$ и $H_p \in \Sigma_H$. Если x – некоторый примарный p′-элемент из K, то $\langle x \rangle H_p = H_p \langle x \rangle$ по условию леммы. Теперь $H_p \triangleleft \langle x \rangle H_p$ по теореме IV.2.8 [6] и p′-холловская подгруппа $K_{p'}$ из K содержится в $N_G(H_p)$. Поэтому $N_G(H_p) \supseteq \langle H, K_{p'} \rangle$. Аналогично, $N_G(K_p) \supseteq \langle K, H_{p'} \rangle$, поэтому силовская p-подгруппа $G_p=H_pK_p$ группы G нормальна в группе G. По индукции факторгруппа G/G_p дисперсивна по Оре, а так как p – наибольший простой делитель порядка группы G, то группа G дисперсивна по Оре. Лемма доказана.

Теорема. *Пусть группа* G=HK, *где* H, K – *сверхразрешимые подгруппы группы* G. *Если циклические примарные подгруппы из* H Σ_K-*квазинормальны* *и циклические примарные подгруппы из K Σ_H-квазинормальны, то группа G сверхразрешима.*

Доказательство. Допустим, что теорема неверна. Тогда существует не сверхразрешимая группа G наименьшего порядка, для которой все условия теоремы верны. Как и в лемме 3 проверяется, что условия теоремы наследуются всеми факторгруппами. По индукции все нетривиальные факторгруппы группы G сверхразрешимы. Поэтому подгруппа Фраттини группы G единична, а подгруппа Фиттинга является минимальной нормальной подгруппой. Ввиду предыдущей леммы группа G дисперсивна по Оре, значит для наибольшего простого делителя p порядка группы G силовская p-подгруппа G_p из G является минимальной нормальной подгруппой. Допустим, что p делит порядок подгруппы H. Так как H сверхразрешима, то в H имеется нормальная подгруппа $< x >$ простого порядка p. По условию теоремы произведение $< x > K_{p'}$ есть подгруппа группы G. Поэтому $< x > \lhd < x > K_{p'}$, поскольку подгруппы p-замкнутых групп p-замкнуты. Теперь $N_G(< x >) \geq < H, G_p, K_{p'} >$, поэтому $< x >$ нормальна в G и по индукции факторгруппа $G/< x >$ сверхразрешима. Значит и G сверхразрешима.

Следствие 1. ([7, теорема 1]) Пусть группа G=HK, где H, K – сверхразрешимые подгруппы группы G взаимно простых порядков с силовскими системами Σ_H и Σ_K соответственно. Если H и циклические подгруппы из H Σ_K-квазинормальны, K и циклические подгруппы из K Σ_H-квазинормальны, то группа G сверхразрешима.

Следствие 2. ([7, теорема 2]) Пусть группа G=HK, где H, K – сверхразрешимые подгруппы группы G с силовскими системами Σ_H и Σ_K соответственно. Если элементы силовских систем Σ_H и Σ_K попарно перестановочны, циклические подгруппы из H Σ_K-квазинормальны, циклические подгруппы из K Σ_H-квазинормальны, то группа G сверхразрешима.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Шеметков Л.А.*** Формации конечных групп. М.: Наука, 1978. – 272 с.
2. ***Baer R.*** Classes of finite groups and their properties // Illinois J. Math., 1957. Vol.1. P. 115-187.
3. ***Assad M., Shaaban A.*** On the supersolvability of finite groups// Arch. Math., 1989. Vol.53. P.318-326.
4. ***Васильев А.Ф., Васильева Т.И.*** О конечных группах, главные факторы которых являются простыми группами // Изв. вузов. Сер. матем., 1997. №11. С.10-14.
5. ***Huppert B.*** Endliche Gruppen, I. Berlin–Heidelberg – New York: Springer, 1967. –793 s.
6. ***Doerk K. and Hawkes T.*** Finite soluble groups. Berlin – New York: Walter de Gruyter., 1992. – 898 p.
7. ***Курносенко Н.М.*** О факторизации конечных групп сверхразрешимыми и нильпотентными подгруппами // Вопросы алгебры. Гомель: Изд-во ГГУ им. Ф. Скорины, 1998. Вып.12. С.113-122.

S U M M A R Y

It is proved that a finite group G which is a product of normal supersolvable subgroups H and K is supersolvable if cyclic primary subgroups of every multiplier are permutative with elements of Sylow semisystem of an other multiplier.