

УДК 534.121.2

П.Ф. Коршиков

Свободные радиально-симметричные колебания кольцевой мембраны с присоединенным стержнем

Во всем мире ведутся исследования по повышению эффективности лечения тугоухости и глухоты с использованием математико-механических моделей среднего уха в норме и после различных способов его хирургической реконструкции [1]. В некоторых случаях отохирургии при полной реконструкции среднего уха, применяют так называемые стержневые протезы [2], [3]. Протез такого типа устанавливается в среднем ухе так, что один конец стержня жестко соединен с восстановленной мембраной. Под стержень, на место соединения мембраны и стержня устанавливается круговая, упругая пластина, которая предохраняет мембрану от разрыва. В силу этого восстановленная мембрана считается кольцевой. Второй конец стержня соединен с основанием

стремени. В данной работе будем рассматривать только поступательное движение основания стремени вдоль оси симметрии стержня.

Схематически стержневой протез представлен на рисунке, где введены следующие обозначения: 1 – восстановленная мембрана (tympani), 2 – круглая, упругая пластина, 3 – стержень, 4 – основание стремени, 5 – улитка, 6 – улитковая жидкость, 7 – мембрана круглого окна, 8 – круглое окно, w – прогиб мембраны 1, u – смещение стержня, T – сила натяжения мембраны, приходящаяся на единицу длины, F – сила, действующая на стержень со стороны внутреннего уха, a , b – радиусы внешнего и внутреннего контуров мембраны 1, R – радиус недеформированной мембраны 7, S – площадь основания стремени, S_0 – площадь круглого окна 8.

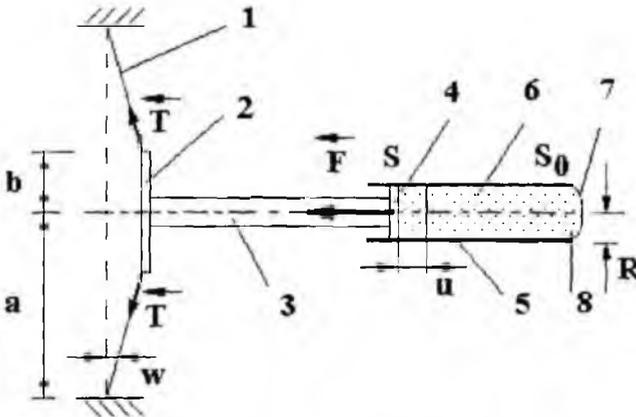


Рис. Схема стержневого протеза, расположенного в реконструированном среднем ухе человека

Рассмотрим кольцевую мембрану с концентрически присоединенным стержнем. Будем исследовать свободные низкочастотные радиально-симметричные поперечные колебания мембраны в линейном приближении. В этом случае колебания мембраны описываются уравнением

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) W - \frac{\sigma}{T} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

где σ – поверхностная плотность мембраны, t – время, W – прогиб мембраны.

Уравнение движения присоединенного стержня имеет вид:

$$2\pi b T \left. \frac{\partial W}{\partial r} \right|_{r=b} + \mu U + m \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0, \quad (2)$$

где m – масса стержня, $2\pi b T \left. \frac{\partial W}{\partial r} \right|_{r=b}$ – проекция равнодействующей сил натяжения на ось симметрии, U – смещение стержня, $F = \mu U$ – сила, являющаяся мерой взаимодействия внутреннего уха и основания стремени и возникающая в результате деформации мембраны круглого окна. Коэффициент μ будет определен ниже.

Граничные условия для кольцевой мембраны имеют вид:

$$W(r, t)|_{r=a} = 0, \quad W(r, t)|_{r=b} = U(t). \quad (3)$$

Решение уравнений (1) и (2) будем искать в виде:

$$W = w \cos \omega t, \quad (4)$$

$$U = u \cos \omega t. \quad (5)$$

Подставляя (4) в (1), а (5) в (2), получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + k^2 w = 0, \quad k^2 = \frac{\sigma \omega^2}{T}, \quad (6)$$

$$-m\omega^2 u + 2b\pi l \left. \frac{dw}{dr} \right|_{r=b} + \mu u = 0. \quad (7)$$

Решение уравнения (6), с учетом граничных условий имеет вид

$$w(r) = C_1 J_0(kr) + C_2 Y_0(kr). \quad (8)$$

$$C_1 = -C_2 \frac{Y_0(kr)}{J_0(kr)}, \quad C_2 = \frac{u}{Y_0(kb) - \frac{Y_0(ka)}{J_0(ka)} J_0(kb)}$$

где J_0, Y_0 – функции Бесселя первого и второго рода нулевого порядка. Подставляя (8) в (7), получим уравнение, относительно искомой частоты

$$\mu - m\omega^2 + 2\pi T b k \frac{\frac{d}{dr} \left(Y_0(kr) - \frac{Y_0(ka)}{J_0(ka)} J_0(kr) \right) \Big|_{r=b}}{Y_0(kb) - \frac{Y_0(ka)}{J_0(ka)} J_0(kb)} = 0. \quad (9)$$

Для определения коэффициента μ рассмотрим мембрану круглого окна. Пренебрегая инерциальными свойствами жидкости и мембраны, запишем уравнение равновесия мембраны:

$$\frac{d^2 s}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{ds}{dr} = -q, \quad q = \frac{PR}{T}. \quad (10)$$

где s – прогиб круглой мембраны.

Граничные условия для мембраны имеют вид:

$$s(r)|_{r=R} = 0, \quad s(r)|_{r=R} < \infty. \quad (11)$$

Решая краевую задачу (10), (11), получаем выражение для прогиба мембраны круглого окна

$$s = \frac{q}{4} (R^2 - r^2)$$

Объем жидкости под выпуклой круглой мембраной равен $V = \frac{\pi q R^4}{8}$. В

случае низкочастотных колебаний жидкость улитки будем считать несжимаемой, в силу чего объем жидкости можно записать как $V = Su$. Приравнявая

правые части формул для объема жидкости и учитывая, что $q = \frac{\mu u R}{TS}$, полу-

чаем формулу для коэффициента

$$\mu = \frac{8\pi T_n}{R} \left(\frac{S}{S_0} \right)^2,$$

где T_n – сила натяжения мембраны круглого окна.

Таблица 1

Зависимость собственных частот ω_i (Гц) от массы протеза при $T=10^{-6}$ Н/м, $b=2 \cdot 10^{-3}$ м

$m \cdot 10^5$, кг	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7	ω_8
4,00	50,84	66,36	135,23	203,43	271,55	339,63	407,70	475,76
6,00	40,98	66,96	135,40	203,58	271,69	339,77	407,84	475,90
8,00	35,63	67,06	135,48	203,65	271,76	339,84	407,91	475,97
1,00	31,85	67,13	135,53	203,70	271,80	339,88	407,95	476,01
1,20	29,07	67,18	135,56	203,73	271,83	339,91	407,98	476,04

Таблица 2

Зависимость собственных частот ω_i (Гц) от радиуса протеза при $m=6 \cdot 10^{-6}$ кг, $T=10^{-6}$ Н/м

$b \cdot 10^{-3}$, м	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7	ω_8
0,80	41,46	46,46	95,99	144,91	193,69	242,41	291,01	336,75
1,20	41,34	52,11	105,54	160,49	214,33	268,12	321,90	375,65
1,60	41,27	58,72	119,33	179,55	239,67	299,76	359,84	419,90
2,00	40,98	66,96	135,40	203,58	271,69	339,77	407,84	475,90
2,40	41,14	77,45	156,33	234,95	313,51	392,05	470,58	549,10

Таблица 3

Зависимость собственных частот ω_i (Гц) от силы натяжения при $m=6 \cdot 10^{-6}$ кг, $b=2 \cdot 10^{-3}$ м

$T \cdot 10^4$, Н/м	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7	ω_8
0,10	40,98	66,96	135,40	203,58	271,69	339,77	407,84	475,90
0,20	40,92	116,10	234,50	352,63	470,59	588,51	706,41	824,29
0,30	40,73	164,25	351,73	498,70	665,52	832,28	999,01	1165,72
0,40	40,59	201,18	406,29	610,78	815,10	1019,33	1223,54	1427,72
1,20	40,48	232,31	469,15	705,27	941,19	1177,03	1412,82	1648,58

На основании формулы (9) исследована зависимость частот свободных колебаний от изменения параметров модели. При расчете собственных частот использовались следующие значения постоянных параметров модели: $a=5 \cdot 10^{-3}$ м, $b=2 \cdot 10^{-3}$ м, $R=10^{-3}$ м, $T_n=10^{-5}$ Н/м. В качестве изменяемых параметров модели были рассмотрены: масса стержня, внутренний радиус восстановленной мембраны и сила натяжения мембраны. Полученные зависимости для восьми первых частот представлены в таблицах 1, 2 и 3. В частности из таблицы 1 следует, что масса протеза оказывает большее влияние на первую частоту, чем на остальные. Как и следовало ожидать, при увеличении массы протеза значение минимальной частоты уменьшается. Анализируя таблицы 2 и 3 следует отметить незначительное влияние остальных параметров на наименьшую (первую частоту) свободных колебаний модели. С увеличением номера частоты это влияние возрастает.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ситников В.П., Мухомов Г.И.** Возможности математического моделирования среднего уха человека. Сборник докладов научно-практической конференции «Проблемы научно-инновационного развития Витебской области и пути их решения». М., 1999. С. 245-247.
2. **Karl-Bernd Huttenbrink.** Mechanical aspects of middle ear reconstruction. Middle Ear Mechanics in Research and Otosurgery. (ed. By K.-B. Huttenbrink), Dresden: Dept. of Oto-Rhino-Laryngology, Univ. of Technology, 1997. P 165 - 168.
3. **Jahnke, K., Lieberum, B., Kuhn, W.** Missing handle of malleus: reinforcement of the tympanic membrane. (ed. By K.-B. Huttenbrink), Dresden: Dept. of Oto-Rhino-Laryngology, Univ. of Technology, 1997. P 197 - 199.

S U M M A R Y

The free radially-symmetric vibrations of the hearing bar artificial limb are investigated. This approximate model includes the circular membrane and the rod which are conjuncted concentrically. The transtendational equation for determination of the first eight frequencies has been obtained. Influence of low frequencies upon various parameters of the model is analysed.