УДК 512.548

А.М. Гальмак

О решетке конгруэнций n-арной группы

В [1, теорема 8.19] установлено, что решётка всех конгруэнций n-арной группы <A, [ ]> изоморфна некоторой подрешётке решётки всех инвариантных подгрупп группы <A, @>, где, как обычно, через <A, @> обозначается группа с операцией

$$x @ y = [x\alpha y],$$

где α – обратная последовательность для $a \in A$. В данной работе этот же результат получен для подрешётки, которая определяется значительно проще, чем в [1]. Отметим, что аналогичный результат для соответствующей группы Поста $<A_0, *>$ имеется в [2, 3].

Лемма 1. *Если* ρ *– конгруэнция n-арной группы <A, [ ]>, то для любого* $a \in A\rho$ *является конгруэнцией группы <A, @>, при этом* $<\rho(a), @>$ *– инвариантная подгруппа группы <A, @>, удовлетворяющая условию*

$$[a\rho(a)\alpha] = \rho(a), \tag{1.1}$$

где α *– обратная последовательность для* a.

Доказательство. Если $(x, y) \in \rho$, $(u, v) \in \rho$, то из $(a, a) \in \rho$, $(\bar{a}, \bar{a}) \in \rho$ и того, что ρ – конгруэнция на < A, [ ] >, следует

$$([x\bar{a}\underbrace{a..a}_{n-3}u], [y\bar{a}\underbrace{a..a}_{n-3}v]) \in \rho,$$

$$(x @ u, y @ v) \in \rho.$$

Следовательно, ρ – конгруэнция на < A, @ >.

Так как a – единица группы <A, @>, то $<\rho(a), @>$ –инвариантная подгруппа группы <A, @>.

Если b – произвольный элемент из $\rho(a)$, то полагая $\alpha = \bar{a}\underbrace{a\ldots a}_{n-3}$, получим

$$\rho([ab\alpha]) = [\rho(a)\rho(b)\rho(\bar{a})\underbrace{\rho(a)\ldots\rho(a)}_{n-3}] =$$

$$= [\rho(a)\rho(a)\rho(\bar{a})\underbrace{\rho(a)\ldots\rho(a)}_{n-3}] = \rho([aa\bar{a}\underbrace{a\ldots a}_{n-3}]) = \rho(a),$$

т.е $\rho([ab\alpha]) = \rho(a)$. Следовательно, $[ab\alpha] \in \rho(a)$, и значит

$$[a\rho(a)\alpha] \subseteq \rho(a). \tag{1.2}$$

Аналогично доказывается включение

$$[\bar{a}\rho(a)\underbrace{a\ldots a}_{n-2}] \subseteq \rho(a). \tag{1.3}$$

Из (1.2) следует

$$[a[a\rho(a)\bar{a}\underbrace{a\ldots a}_{n-3}]\bar{a}\underbrace{a\ldots a}_{n-3}] \subseteq [a\rho(a)\bar{a}\underbrace{a\ldots a}_{n-3}] \subseteq \rho(a),$$

т.е.

$$[aa\rho(a)\bar{a}\underbrace{a\ldots a}_{n-3}\bar{a}\underbrace{a\ldots a}_{n-3}] \subseteq \rho(a).$$

Продолжая, получим

$$[\underbrace{a\ldots a}_{n-3}\rho(a)\underbrace{\underbrace{\bar{a}a\ldots a}_{n-3}\ldots\underbrace{\bar{a}a\ldots a}_{n-3}}_{n-3}]\subseteq\rho(a),$$

откуда и из (1.3) следует

$$[\bar{a}[\underbrace{a\ldots a}_{n-3}\rho(a)\underbrace{\underbrace{\bar{a}a\ldots a}_{n-3}\ldots\underbrace{\bar{a}a\ldots a}_{n-3}}_{n-3}]\underbrace{a\ldots a}_{n-2}]\subseteq[\bar{a}\rho(a)\underbrace{a\ldots a}_{n-2}]\subseteq\rho(a),$$

т.е.

$$[\bar{a}\underbrace{a\ldots a}_{n-3}\rho(a)\underbrace{\underbrace{\bar{a}a\ldots a}_{n-2}\ldots\underbrace{\bar{a}a\ldots a}_{n-2}a}_{\text{нейтр.}}]\subseteq\rho(a),$$

$$[\alpha\rho(a)a]\subseteq\rho(a). \tag{1.4}$$

Из (1.4) следует

$$[a[\alpha\rho(a)a]\alpha]\subseteq[a\rho(a)\alpha],$$

$$\rho(a)\subseteq[a\rho(a)\alpha]. \tag{1.5}$$

Из (1.2) и (1.5) получаем (1.1). Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть* $<A, [\,]>$ – *n-арная группа,* $a\in A$, $\rho_{B,a}$ – *конгруэнция группы* $<A, @>$, *определяемая её инвариантной подгруппой* $<B, @>$, *удовлетворяющей условию*

$$[aB\alpha] = B, \tag{2.1}$$

где α – *обратная последовательность для* a. *Тогда* $\rho_{B,a}$ – *конгруэнция n-арной группы* $<A, [\,]>$.

Доказательство. Пусть $(x, y)\in\rho_{B,a}$. Тогда

$$x @ B = y @ B. \tag{2.2}$$

По предложению 7.4 [4], отображение $\beta : z\to[az\alpha]$ является автоморфизмом группы $<A, @>$. Поэтому из (2.2) с учётом (2.1) вытекает

$$(x @ B)^\beta = (y @ B)^\beta,\ x^\beta @ B^\beta = y^\beta @ B^\beta,\ x^\beta @ B = y^\beta @ B,$$

откуда

$$x^{\beta^k} @ B = y^{\beta^k} @ B$$

для любого $k\geq 1$, т.е.

$$(x^{\beta^k},\ y^{\beta^k})\in\rho_{B,a}. \tag{2.3}$$

Если теперь $(x_i, y_i)\in\rho_{B,a}$ $(i = 1, \ldots, n)$, то из (2.3) получаем

$$(x_i^{\beta^k},\ y_i^{\beta^k})\in\rho_{B,a},$$

откуда и из того, что $\rho_{B,a}$ – конгруэнция группы $<A, @>$ следует

$$(x_1 @ x_2^\beta @ \ldots x_n^{\beta^{n-1}} @ d,\ y_1 @ y_2^\beta @ \ldots y_n^{\beta^{n-1}} @ d)\in\rho_{B,a}, \tag{2.4}$$

где $d = [\underbrace{a\ldots a}_{n}]$. Применяя к (2.4) теорему Глускина-Хоссу, получаем

$$([x_1\ldots x_n],\ [y_1\ldots y_n])\in\rho_{B,a}.$$

Следовательно, $\rho_{B,a}$ – конгруэнция на $<A, [\,]>$. Лемма доказана.

Для всякой n-арной группы $< A, [\ ] >$ и её элемента a обозначим через $\bar{L}(A, @)$ множество всех инвариантных подгрупп $< B, @ >$ группы $< A, @ >$, удовлетворяющих условию $[aB\alpha] = B$, где α – обратная последовательность для a.

Теорема. *Множество* $\bar{L}(A, @)$ *образует подрешётку решётки всех инвариантных подгрупп группы* $< A, @ >$, *изоморфную решётке* Con(A) *всех конгруэнций* n-*арной группы* $< A, [\ ] >$.

Доказательство. Если $< B, @ >, < C, @ > \in \bar{L}(A, @)$, то

$$[aB\alpha] = B, \quad [aC\alpha] = C. \tag{1}$$

Так как $a \in B$, $a \in C$, то $B \cap C \neq \varnothing$. Поэтому, согласно лемме 9.10 [1], с учётом (1), будем иметь

$$[a(B \cap C)\alpha] = [aB\alpha] \cap [aC\alpha] = B \cap C,$$

т.е.

$$< B, @ > \cap < C, @ > \in \bar{L}(A, @). \tag{2}$$

Так как

$$< B, @ > \vee < C, @ > = < B, @ > @ < C, @ >,$$

то, снова применяя (1), получим

$$[a(B \vee C)\alpha] = [a(B\ @\ C)\alpha] = [a[B\alpha C]\alpha] =$$
$$= [[aB\alpha]\alpha[aC\alpha]] = [B\alpha C] = B\ @\ C = B \vee C,$$

т.е.

$$< B, @ > \vee < C, @ > \in \bar{L}(A, @). \tag{3}$$

Из (2) и (3) следует, что $\bar{L}(A, @)$ подрешётка решётки всех инвариантных подгрупп группы $< A, @ >$.

Согласно лемме 1, отображение $f: \rho \to < \rho(a), @ >$ отображает Con(A) в $\bar{L}(A, @)$. А по лемме 2, f отображает Con(A) на всё $\bar{L}(A, @)$. Если предположить что $f(\rho) = f(\sigma)$, то $\rho(a) = \sigma(a)$, откуда $\rho = \sigma$. Следовательно, f – биекция. Так как $\rho \subseteq \sigma$ тогда и только тогда, когда $\rho(a) \subseteq \sigma(a)$, то f – изоморфизм. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Гальмак А.М.*** Конгруэнции полиадических групп. Мн.: Беларуская навука, 1999. - 182 с.
2. ***Monk J.D., Sioson F.M.*** On the general theory of m-groups // Fund. Math: 1971. №72. С. 233-244.
3. ***Щучкин Н.А.*** Разрешимые и нильпотентные n-группы // Алгебраические системы. Волгоград, 1989. С. 133-139.
4. ***Гальмак А.М.*** Теоремы Поста и Глускина-Хоссу. Гомель, 1997. - 85 с.

S U M M A R Y

It is proved in the paper that the lattice of all congruences of n-ary group $< A, [\ ] >$ *is isomorphic to the lattice of all normal subgroups* $< B, @ >$ *of group* $< A, @ >$ *which satisfy the condition* $[aB\alpha] = B$, *where* α *is an inverse sequence for* a.

Поступила в редакцию 15.06.2000