УДК 512.542

В.Г. Сементовский

О пронормальных подгруппах конечных π-разрешимых групп

Пусть π – некоторое множество простых чисел. Подгруппу A группы G будем называть π-связанной, если либо порядок подгруппы A, либо ее индекс в G будет π-числом.

В данной работе обобщаются некоторые известные критерии пронормальности подгрупп разрешимых групп путем доказательства этих критериев для π-связанных подгрупп π-разрешимых групп.

В дальнейшем нам понадобятся некоторые сведения о холловских системах и системных нормализаторах π-разрешимых групп. Все необходимые результаты о холловских системах π-разрешимых групп заимствованы из [1], а сведения о системных нормализаторах – из [2]. Кроме того, будем использовать некоторые результаты, приведенные в книге [3].

Лемма 1. *Пусть* G – *π-разрешимая группа и* $H = O_\pi(G) \times O_{\pi'}(G)$. *Тогда* $C_G(H) \subseteq H$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Лемму докажем индукцией по $|G|$. Обозначим $S = H\,C_G(H)$. Так как S нормальна в G, то $O_\pi(S) = O_\pi(G)$ и $O_{\pi'}(S) = O_{\pi'}(G)$. Если $|S| < |G|$, то по индукции $C_G(H) \subseteq H$. Итак, $G = S$. Пусть N / H – собственная минимальная нормальная подгруппа группы G/H. Тогда $N = H\,C_N(H)$. Если $|N| < |G|$, то по индукции лемма верна. Итак, $G = N$. Так как в G/H нет собственных нормальных подгрупп, то G/H – простая группа. Так как G/H – π-разрешима, то она либо циклическая p-группа для некоторого простого числа p из π, либо простая π'-группа.

Пусть G/H – циклическая p-группа простого порядка. Из изоморфизма $G / H \cong C_G(H) / C_G(H) \cap H$ ввиду $C_G(H) \cap H \subseteq Z(H) \subseteq Z(G)$ следует, что $C_G(H)$ будет абелевой. Тогда $C_G(H) \subseteq H$.

Итак, G/H – простая π'-группа. В этом случае $G_\pi = H_\pi$. Обозначим $C=C_G(H)$. Тогда $G = HC = H_\pi C_\pi H_{\pi'} C_{\pi'} = H_\pi C_{\pi'} H_{\pi'}$. Так как H_π и $H_{\pi'}$ поэлементно перестановочны и C_π с $C_{\pi'}$ – тоже, то $G=H_\pi \times C_{\pi'} H_{\pi'}$. Тогда $G = O_\pi(G) \times O_{\pi'}(G)$, и лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть* M – *максимальная подгруппа π-разрешимой группы* G, *содержащая некоторую π'-холловскую подгруппу группы* G. *Если* M – *подгруппа с единичным ядром, то:*

1) G *имеет единственную минимальную нормальную группу* N, *которая*

будет дополнением к M *в* G *и* $N = C_G(N) = O_p(G)$;

2) $O_p(M) = 1$;

3) *все дополнения к* N *в* G *сопряжены с* M.

Доказательство. 1) Так как группа G – π-разрешима, $O_{p'}(G) = 1$, и $O_p(G)$ не содержится в M, то существует минимальная нормальная подгруппа N группы G и G = MN. По теореме 5.3. из [2] такая подгруппа единственна, и, следовательно, $N = O_p(G)$. Но так как N абелева, то по лемме I $N = C_G(N)$, и 1) доказано.

2) Пусть $P = O_p(M)$. Тогда PN нормальна в MN = G и $P \subseteq O_p(G) \cap M = N \cap M = 1$. Итак, $O_p(M) = 1$, и 2) доказано.

3) Пусть S – дополнение к N в G. Если S = 1, то утверждение тривиально. Итак, $|S| > 1$. Обозначим $R = O_{pp'}(G)$. Так как $N = O_p(G)$, то $N \subseteq R$ и N – p-силовская в R. Тогда $N(S \cap R) = SN \cap R = R$ и, следовательно, $S \cap R$ будет дополнением к N в R. Так как R нормальна в G и $|S| < |G|$, то $S = N_G(S \cap R)$. Рассуждая аналогично, получим $M = N_G(M \cap R)$. Теперь подгруппы $S \cap M$ и $R \cap M$ будут p′-холловскими в R и, ввиду π-разрешимости группы G, сопряжены. Следовательно, сопряжёнными будут их нормализаторы S и M, и 3) доказано.

Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть* M *– максимальная подгруппа π-разрешимой группы* G, *содержащая* p′*- холловскую подгруппу* $G_{p'}$ *группы* G *для некоторого* $p \in \pi$. *Подгруппа* M *не будет нормальной тогда и только тогда, когда* $N_G(G_{p'}) \subseteq M$.

Доказательство. Если $N_G(G_{p'}) \subseteq M$, то подгруппа M не может быть нормальной так как содержит абнормальную подгруппу $N_G(G_{p'})$.

Обратное утверждение докажем индукцией по |G|. Пусть K – ядро подгруппы M. Если $|K| > I$, то по индукции $N_{G/K}(G_{p'}K/K)$ содержится в M/K. Так как $N_{G/K}(G_{p'}K/K) = N_G(G_{p'})K/K$, то $N_G(G_{p'}) \subseteq M$, и в этом случае лемма верна. Итак, K = 1. По лемме 2 $O_{p'}(G) = I$, а $O_p(G)$ будет дополнением к M в G. Так как по лемме 2 $O_p(M) = 1$, то $|O_{p'}(M)| > 1$. Обозначим $R = O_{p'}(M)$. Тогда $M = N_G(R)$. Очевидно, $R \subseteq G_{p'}$. Следовательно, $R = G_{p'} \cap R\,O_p(G)$ и $RO_p(G)$ нормальна в $M\,O_p(G) = G$, то $N_G(G_{p'}) \subseteq N_G(G_{p'} \cap R\,O_p(G)) = N_G(R) = M$. Итак, $N_G(G_{p'}) \subseteq M$, и лемма доказана.

Теорема 4. *π-связанная подгруппа* H *π-разрешимой группы* G *пронормальна тогда и только тогда, когда всякая холловская система* $\sum$ *группы* G *редуцируется точно в одну подгруппу, сопряжённую с* H.

Доказательство. Пусть H – пронормальная подгруппа группы G, в которую редуцируется холловская система $\sum$ группы G. Индукцией по |G| докажем, что из класса всех сопряженных с H подгрупп H будет единственной, в которую редуцируется $\sum$.

Пусть N – минимальная подгруппа группы G. Тогда N – либо абелева p-группа для некоторого p из π, либо π'-группа. Предположим, что $\sum$ редуцируется в H и H^g, где $g \in G$. Тогда холловская система $\sum N/N$ группы G/N редуцируется в подгруппы HN/N и H^gN/N. По индукции $HN/N = H^gN/N$, и, следовательно, $HN = H^gN$. Тогда существует элемент x из $<H, H^g> \subseteq HN$, такой, что $H^g = H^n$. Так как $x = hn$, где $h \in H$ и $n \in N$, то $H^g = H^n$. Так как $\sum$ редуцируется в HN, то редуцируется в H и H^n, и если только $|HN| < |G|$, то по индукции $H = H^n = H^g$, и утверждение доказано. Итак, $G = HN$.

Пусть $|G : H|$ – π-число. Тогда H содержит некоторую π-холловскую подгруппу $G_{\pi'}$ группы G. Если N – π-группа, то $N \subseteq G_{\pi'} \subseteq H$. Тогда $G = H$, и теорема доказана. Итак, N – абелева p-группа для $p \in \pi$. Тогда H будет максимальной подгруппой группы G. Если H нормальна в G, то утверждение тривиально. Итак, H не нормальна в G. Так как $G_{p'}$ и $G_{p'}^g$ – p′-холловские подгруппы из H, то существует элемент $h \in H$, такой, что $G_{p'}^g = G_{p'}^h$. Тогда $gh^{-1} \in N_G(G_{p'})$. По лемме 3 $N_G(G_{p'}) \subseteq H$. Следовательно, $g \in H$, $H^g = H$, и в этом случае теорема верна.

Итак, H – π-группа. Если N – π-группа, то $G = HN$ будет π-группой и, следовательно, разрешима. Тогда по теореме 6.6 из [3] теорема доказана. Итак, N – π'-группа. В этом случае H будет π-холловской подгруппой группы G. Так как H и H^g пронормальны, то они не перестановочны и, следовательно, не могут входить в одну холловскую систему. Итак, из того, что $\sum$ редуцируется в H и H^g, следует $H = H^g$, и утверждение доказано.

Докажем обратное утверждение. Пусть $\sum_H$ – холловская система подгруппы H. Её можно продолжить до холловской системы $\sum_1$ подгруппы $<H, H^g>$, где $g \in G$, а $\sum_1$ можно продолжить до холловской системы $\sum$ группы G, которая по условию редуцируется в единственную подгруппу, сопряжённую с H. Тогда для любого элемента g из G существует элемент x из $<H, H^g>$ такой, что $\sum^x$ редуцируется в H^g. Тогда $\sum$ редуцируется в $H^{xg^{-1}}$ и по условию теоремы $H = H^{xg^{-1}}$. Отсюда $H^g = H^x$, где x элемент из $<H, H^g>$. Пронормальность подгруппы H доказана.

Теорема доказана.

Теорема 5. *Пусть* $\sum$ *– холловская система π-разрешимой группы* G *и* $\{H_i \mid i = 1, 2, \ldots, n\}$ *– множество пронормальных π-связанных подгрупп группы* G, *в каждую из которых редуцируется* $\sum$. *Пусть* M *– множество подгрупп вида* $<H_i^{g_i} \mid g_i \in G>$. *Тогда все минимальные по включению подгруппы из* M *сопряжены. Кроме того, подгруппа* $< H_i \mid i = 1, 2, \ldots, n >$ *будет единственной из класса сопряжённых подгрупп, в которую редуцируется* $\sum$, *и, следовательно, она пронормальна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $K = < H_i \mid i = 1, 2, \ldots, n >$. Пусть S – некоторая подгруппа из M . Тогда $S = <H_i^{g_i} \mid g_i \in G>$. Теперь в G существует элемент g, такой, что $\sum^g$ редуцируется в S. Докажем, что $K^g \subseteq S$. Для любого $i = 1, 2, \ldots, n$ найдётся такой элемент $s_i \in S$, что холловская система $\sum^g \cap S$ подгруппы S будет редуцироваться в $H_i^{g_i s_i}$. Так как H_i пронормальна в G, то по теореме 4 $H_i^g = H_i^{g_i S_i} \subseteq S$. Тогда $K \subseteq S$. Итак, доказано, что всякая подгруппа из M содержит некоторую подгруппу, сопряженную с K. Так как $K^g \in M$, то K^g – минимальная по включению во множестве M. Следовательно, множество минимальных в M подгрупп будет классом сопряженных с K подгрупп.

Теперь, если Σ редуцируется в K^g, то $\Sigma^{g^{-1}}$ редуцируется в K, и по доказанному выше, $K^g = K$. Итак, $K^g = K$ и Σ редуцируется точно в одну подгруппу, сопряжённую с K. По теореме 4 подгруппа K пронормальна в G, и теорема доказана.

Теорема 6. *Пусть* A *и* B *– пронормальные π-связанные подгруппы π-разрешимой группы* G. *Если* A *и* B *перестановочны, то подгруппа* AB *будет π-связанной пронормальной подгруппой группы* G.

Доказательство. Пусть Σ – холловская система подгруппы AB, которая редуцируется в A. Тогда существует элемент x = a в, где $a \in A$ и $в \in B$, такой, что Σ^x редуцируется в B. Теперь Σ^a редуцируется в A и Σ^a редуцируется в B. Пусть Σ^* – продолжение Σ^a до холловской системы группы G. Тогда Σ^* редуцируется в подгруппы A и B. По теореме 5 подгруппа $< A, B > = A B$ пронормальна в G, и теорема доказана.

Теорема 7. *Пусть Σ – холловская система π-разрешимой группы* G, A *и* B *– π-связанные пронормальные подгруппы группы* G, *в которые редуцируется Σ. Если существуют элементы* x *и* y *из* G *такие, что A^x и B^y перестановочны, то подгруппы* A *и* B *тоже перестановочны.*

Доказательство. Пусть Σ – холловская система группы G, которая редуцируется в A и B. Тогда существует холловская система Σ^g, которая редуцируется в A^x и B^y. С другой стороны, Σ^g редуцируется в подгруппы A^g и B^g. Тогда, по теореме 4, $A^x = A^g$ и $B^y = B^g$. Отсюда $A^x B^y = (A B)^g$, и AB будет подгруппой группы G. Теорема доказана.

Теорема 8. *π-связанная подгруппа* A *π-разрешимой группы* G *пронормальна в* G *тогда и только тогда, когда для любой подгруппы* H, *содержащей* A, $N_H(A)$ *абнормальна в* H.

Доказательство. Очевидно, если $A \subseteq H$ и A пронормальна в G, то $N_H(A)$ абнормальна в H.

Обратное утверждение докажем индукцией по $|G|$. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G. Тогда она либо абелева p-группа для p из π, либо π'-группа. Так как AN / N – π-связанная пронормальная подгруппа группы G/N, то для G/N условия теоремы выполняются. Тогда по индукции AN/N пронормальна в G/N, а отсюда AN пронормальна в G. Если $|N_G(AN)| < |G|$, то по индукции A пронормальна в $N_G(AN)$, а следовательно, и в G. Итак, подгруппа AN нормальна в G.

Пусть N – π'-группа. Если A – π-группа, то она будет π-холловской в AN, и, следовательно, пронормальна в G. Если A содержит π'-холловскую подгруппу группы G, то AN = A и нормальна в G. Итак, если N – π'-группа, то теорема верна.

Итак, N – абелева p-группа для p из π, и AN нормальна в G. Если G = AN, то подгруппа A будет максимальной в G и поэтому пронормальна. Итак, AN – собственная нормальная подгруппа группы G. Тогда по индукции A пронормальна в AN. Если теперь для любого элемента x группы G $|AN <x>| < |G|$, то A пронормальна в AN $<x>$. Тогда существует элемент y из $<A, A^x> \subseteq AN$ такой, что $A^x = A^y$. Теперь из пронормальности подгруппы A в AN следует, что существует $t \in < A, A^y > = < A, A^x >$ и $A^x = A^t$. Итак, подгруппа A пронормальна в G.

Поэтому существует элемент z из G с условием G = AN<z>. Тогда G/AN – циклическая группа, и если A – π-группа, то AN тоже π-группа, и следовательно, разрешима. Тогда группа G тоже разрешима, и по теореме 2.4. из [4] теорема доказана. Итак, A содержит π'-холловскую подгруппу группы G. Тогда G/AN будет циклической q-подгруппой для некоторого $q \in \pi$, и G/AN будет центральным фактором группы G. По теореме 5.6. из [2] системный нормализатор D группы G покрывает G/AN и поэтому G = AND. Так как $N_G(A)$ содержит π'-холловскую подгруппу группы G, то по теореме 5.4. из [2] $D \subseteq N_G(A)$ и $G = N_G(A)N$. Теперь для любого элемента g из G g = k n, где $k \in N_G(A)$ и $n \in N$. Тогда для любого g из G $A^g = A^n$, и так как A пронормальна а AN, то существует $y \in \langle A, A^n\rangle = \langle A, A^g\rangle$ и $A^y = A^g$. И в этом случае теорема верна. Теорема доказана.

Теорема 9. *π-связанная подгруппа* A *π-разрешимой группы* G *пронормальна тогда и только тогда, когда из* $A \subseteq B \subseteq C$ и B *нормальна в* C *следует* $C = B N_C(A)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $A \subseteq B \subseteq C$ и B нормальна в C, N – минимальная нормальная подгруппа группы G. Индукцией по | G | докажем, что, если $C = BN_C(A)$ для любых подгрупп B и C с заданным условием, то A пронормальна в G. Так как для группы G/N условия теоремы выполняются, то по индукции AN/N пронормальна в G/N. Тогда подгруппа AN пронормальна в G. Если $|N_G(AN)| < |G|$, то по индукции A пронормальна в $N_G(AN)$ и, следовательно, в G. Итак, AN нормальна в G. Тогда $G = N_G(A)N$. Если |AN| < |G|, то по индукции A пронормальна в AN. Так как всякий элемент группы можно представить в виде g = kn, где $k \in N_G(A)$ и $n \in N$, то $A^g = A^n$. Теперь существует $y \in \langle A, A^n\rangle = \langle A, A^g\rangle$ такой, что $A^g = A^n = A^y$, и в этом случае утверждение доказано.

Итак, G = AN. Если N – абелева p-группа для $p \in \pi$, то A будет максимальной подгруппой группы G, и, следовательно, пронормальна в G. Итак, N π'-группа. Если A – π-группа, то она будет холловской подгруппой группы G и поэтому пронормальна. Если A содержит π'-холловскую подгруппу группы G, то G = AN = A, и утверждение тривиально.

Обратное утверждение очевидно. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Гольберг П.А.*** Холловские θ-базы конечных групп. Изв. высш. уч. заведений. I, 1961. С. 36-43.
2. ***Кравчук М.И.*** О разрешимых и π-разрешимых конечных группах. ДАН БССР.II, 2, 1967. С. 97-100.
3. ***Doerk K., Hawkes T.*** Finite soluble grous. Berlin – New-York, 1992.
4. ***Wood G.J.*** On pronormal subgroups of finite soluble grous. Arch. Math., 25, 1974. P.578.

S U M M A R Y

In this paper some well-known criteria of subgroup pronormality of soluble groups are generalized by the nay of proving these criteria for subgroups of π-soluble groups in which either the order is π-number or the index is π-number.

Поступила в редакцию 24.05.2000