



Ж.В. Иванова

О предельных циклах одной квадратичной системы с алгебраическим интегралом четвертого порядка

Рассматривается автономная система дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\dot{x} &= cx + hy + a_2x^2 + 2b_2xy + c_2y^2, \\ \dot{y} &= ax + by + a_1x^2 + 2b_1xy + c_1y^2\end{aligned}\quad (1)$$

с взаимно простыми правыми частями и действительными коэффициентами, а также алгебраическая функция четвертого порядка

$$F(x, y) = \sum_{k=0}^4 F_k(x, y) = 0,$$

где $F_k(x, y)$ – однородные полиномы степени k .

В [1] показано, что данную функцию некоторыми аффинными преобразованиями можно свести к одному из четырех видов:

$$\begin{aligned}1) F(x, y) &= x^4 + \sum_{k=0}^3 F_k(x, y) = 0, & 2) F(x, y) &= x^2y^2 + \sum_{k=0}^3 F_k(x, y) = 0, \\ 3) F(x, y) &= x^3y + \sum_{k=0}^3 F_k(x, y) = 0, & 4) F(x, y) &= xy(x+y)^2 + \sum_{k=0}^3 F_k(x, y) = 0.\end{aligned}$$

Пусть система (1) имеет своим частным интегралом функцию вида 4):

$$\begin{aligned}F(x, y) &= xy(x+y)^2 + \alpha_1y^3 + \beta_1xy^2 + \gamma_1x^2y + \delta_1x^3 + \\ &+ \beta_2y^2 + \gamma_2xy + \delta_2x^2 + \gamma_3y + \delta_3x + \delta_4.\end{aligned}\quad (2)$$

В работах [2 – 4] найдены условия, которым должны удовлетворять коэффициенты данной системы, чтобы функция (2) была ее частным интегралом, получено все множество систем вида (1), имеющих частный интеграл (2), проведено полное качественное исследование и доказано отсутствие предельных циклов у систем с нераспадающимися интегралами.

Рассмотрим системы вида (1), которые имеют распадающиеся алгебраические интегралы (2). Такие системы можно разделить на пять групп:

1) системы, у которых интеграл (2) распадается на прямую и кривую третьего порядка;

2) системы, у которых интеграл (2) распадается на две кривые второго порядка;

3) системы, у которых интеграл (2) распадается на две различные прямые и кривую второго порядка;

4) системы, у которых интеграл (2) распадается на две совпадающие прямые и кривую второго порядка;

5) системы, у которых интеграл (2) распадается на четыре прямые.

Автономные системы (1), имеющие нераспадающиеся частные интегралы в виде кривой третьего порядка, рассматривались Р.М. Евдокименко [5]. Ею было проведено полное качественное исследование таких систем и доказано отсутствие у них предельных циклов.

У систем групп 3) и 5) также нет предельных циклов, так как они имеют своими частными интегралами две различные прямые [6].

К системам второй группы относится только система

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -0,5hx + hy - xy, \\ \dot{y} &= hx - 0.5hy + xy\end{aligned}\quad (3)$$

с частным интегралом вида (2), распадающимся на две гиперболы:

$$F(x,y) = [2y(x+y) + 2hx + 4yh + 3h^2][2x(x+y) + 4hx + 2hy + 3h^2] = 0.$$

Очевидно, что особыми точками данной системы являются точки: $O(0; 0)$ – седло и $A(\frac{3}{2}h; -\frac{3}{2})$ – узел.

Рассмотрим системы четвертой группы. Это системы вида

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\beta x + y + a_2x^2 - xy, \\ \dot{y} &= -x + \beta y - a_2y^2 + xy\end{aligned}\quad (4)$$

с частным интегралом

$$F(x,y) = [a_2(x+y) - (\beta+1)]^2 [xy(a_2+1) - (a_2+1)(x+y) + (1+\beta)] = 0.$$

Очевидно, что особыми точками системы (4) являются точки $O(0; 0)$,

$$\begin{aligned}A_1(\frac{\beta-1}{a_2-1}; \frac{\beta-1}{a_2-1}), \quad A_2(\frac{m+\sqrt{m(m-4a_2)}}{2a_2(a_2+1)}; \frac{m-\sqrt{m(m-4a_2)}}{2a_2(a_2+1)}), \\ A_3(\frac{m-\sqrt{m(m-4a_2)}}{2a_2(a_2+1)}; \frac{m+\sqrt{m(m-4a_2)}}{2a_2(a_2+1)}),\end{aligned}$$

где $m = (\beta+1)(a_2+1)$. Находим их характеристические числа:

$$\begin{aligned}\text{для точки } O: \quad \lambda_{1,2} &= \pm \sqrt{\beta^2 - 1}; \\ \text{для точки } A_1: \quad \lambda_{1,2} &= \pm \frac{\sqrt{(\beta-1)(a_2-1)[a_2(\beta-3) + (\beta+1)]}}{a_2-1}; \\ \text{для точки } A_2: \quad \lambda_1 &= \frac{\sqrt{(\beta+1)(a_2+1)[a_2(\beta-3) + (\beta+1)]}}{a_2+1}; \\ \lambda_2 &= \frac{\sqrt{(\beta+1)(a_2+1)[a_2(\beta-3) + (\beta+1)]}}{a_2}; \\ \text{для точки } A_3: \quad \lambda_1 &= -\frac{\sqrt{(\beta+1)(a_2+1)[a_2(\beta-3) + (\beta+1)]}}{a_2+1}; \\ \lambda_2 &= -\frac{\sqrt{(\beta+1)(a_2+1)[a_2(\beta-3) + (\beta+1)]}}{a_2};\end{aligned}$$

Рассмотрим точку O . При $|\beta| > 1$ данная точка является седлом; при $|\beta| = 1$ – сложной особенностью с $\lambda_{1,2} = 0$; при $|\beta| < 1$ – точкой с чисто мнимыми характеристическими числами, т.е. либо центром, либо фокусом.

Определим характер точки O при $|\beta| < 1$ и при $|\beta| = 1$.

Пусть $|\beta| = 1$. С помощью подстановки

$$x = \frac{v}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad y = \frac{\beta v}{\sqrt{1-\beta^2}} - u, \quad t = \sqrt{1-\beta^2} t,$$

систему (4) приведем к виду:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= v + \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(\frac{\beta(\beta+1)(a_2-1)}{1-\beta^2} v^2 + \frac{-2a_2\beta + (\beta+1)}{\sqrt{1-\beta^2}} uv + a_2 u^2 \right), \\ \frac{dv}{dt} &= -u - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(-\frac{a_2\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} v^2 - uv \right). \end{aligned}$$

Полученная система при $|\beta| < 1$ удовлетворяет второму условию центра Сибирского [7]. Следовательно, при этом значении параметра β точка O является центром для (4).

Пусть $|\beta| = 1$. Исследуем систему (4) с помощью метода, указанного в [8, с. 385-410]. Получим, что при $\beta = 1$ точка O является вырожденным положением равновесия; при $\beta = -1$, $-1 < a_2 < 0$ – седлом; при $\beta = -1$, $a_2 < -1$ или $\beta = -1$, $a_2 > 0$ – состоянием равновесия с эллиптической областью. При $\beta = -1$, $a_2 = -1$ или $a_2 = 0$ правые части системы (4) не являются взаимно простыми полиномами.

Исследуем характер точки A_1 . В зависимости от значений параметров a_2 и β данная точка может быть седлом, фокусом или центром, сложным состоянием равновесия.

Пусть выполняется одно из условий:

- 1) $\beta < 1$, $\frac{\beta+1}{3-\beta} < a_2 < 1$;
- 2) $1 < \beta \leq 3$, $a_2 > \frac{\beta+1}{3-\beta}$;
- 3) $1 < \beta \leq 3$, $a_2 < 1$;
- 4) $\beta > 3$, $\frac{\beta+1}{3-\beta} < a_2 < 1$.

Тогда A_1 имеет чисто мнимые характеристические числа и может быть либо фокусом, либо центром. Проводя исследование аналогичное исследованию характера точки O при $|\beta| = 1$, получим, что при выполнении этих условий точка A_1 является центром [7].

При $\beta = 1$ и $a_2 = \frac{\beta+1}{3-\beta}$ точка A_1 имеет нулевые характеристические числа.

При этом, если $\beta = 1$, то точка A_1 совпадает с точкой $O(0;0)$. Если $a_2 = \frac{\beta+1}{3-\beta}$, $\beta > -1$, то точка A_1 является состоянием равновесия с эллиптической областью. Если $a_2 = \frac{\beta+1}{3-\beta}$, $\beta < -1$, то точка A_1 является седлом [8]. Если $\beta = -1$, $a_2 = 0$, то правые части системы (4) не являются взаимно простыми полиномами.

При всех остальных значениях a_2 и β точка A_1 является седлом.

Рассмотрим точки A_2 и A_3 . Данные точки лежат в действительной области, если параметры a_2 и β принимают одно из следующих значений:

- 1) $\beta < -1$, $a_2 > \frac{\beta+1}{3-\beta}$, $a_2 \neq 0$;
- 2) $\beta < -1$, $a_2 < -1$;
- 3) $-1 < \beta < 3$, $-1 < a_2 < \frac{\beta+1}{3-\beta}$, $a_2 \neq 0$;
- 4) $\beta > 3$, $a_2 > -1$, $a_2 \neq 0$;
- 5) $\beta > 3$, $a_2 < \frac{\beta+1}{3-\beta}$.

При $a_2 = -1$ и $a_2 = 0$, эти точки являются бесконечно удаленными. При $\beta = -1$, точки A_2 и A_3 совпадают с точкой O ; при $a_2 = \frac{\beta+1}{3-\beta}$ – с точкой A_1 .

Отметим, что характеристические числа данных точек отличаются только знаками. Следовательно, эти точки имеют один и тот же тип и разный характер устойчивости. При этом, если $a_2 > 1$, то точка A_2 является неустойчивым, а точка A_3 – устойчивым узлом; если $0 < a_2 < -1$, то точки A_2 и A_3 являются седлами; если $a_2 < -1$, то точка A_2 является устойчивым, а точка A_3 – неустойчивым узлом. Итак, видим, что у систем (3) и (4) нет особых точек типа "фокус", а, следовательно, они не могут иметь предельных циклов [9].

Мы рассмотрели все классы систем (1), имеющих алгебраические интегралы вида (2), и доказали, что такие системы не могут иметь предельных циклов. Поэтому справедлива следующая

Теорема. Если система (1) имеет частный интеграл в виде алгебраической функции четвертого порядка (2), то такая система не имеет предельных циклов.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Яблонский А.И. Алгебраические интегралы одной системы дифференциальных уравнений // Диф.уравнения, 1970. Т.6, N5. С. 1752 - 1760.
2. Захаренка Ж.В. Якаснае даследаванне аўтаномных сістэм другога парадку з квадратычнымі правымі часткамі // Весці ВДПУ, 1994. N1. С. 99-103.
3. Захаренко Ж.В., Яблонский А.И. Качественное исследование системы дифференциальных уравнений при наличии алгебраического интеграла // Диф. уравнения, 1995. Т.31, N5. С. 759 - 764.
4. Захаренка Ж.В. Якаснае даследаванне адной дынамічнай сістэмы другога парадку // Весці ВДПУ, 1995. N1. С.89 - 91.
5. Евдокименко Р.М. Исследование в целом систем дифференциальных уравнений второго порядка при наличии алгебраических траекторий. Дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. Минск, 1982. - 109 с.
6. Баутин Н.П. О периодических решениях одной системы дифференциальных уравнений // ПММ, 1954. С. 128.
7. Сибирский К.С. Об условиях наличия центра и фокуса // Уч. зап. Кишиневского ун-та, 1954. N4. С. 115 - 117.
8. Качественная теория динамических систем второго порядка / Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. М.: Наука, 1966. - 568 с.
9. Воробьев А.П. К вопросу о циклах вокруг особой точки типа "узел" // Докл. АН ВССР, 1960. Т.4, N9. С. 369 - 371.

S U M M A R Y

The autonomous system of the second order with the square-law right parts, which has the particular integral $4)F(x,y) = xy(x + y)^2 + \sum_{k=0}^4 F_k(x,y) = 0$, is investigated. It is proved, that this system has not limit cycles.