УДК 539.3

П.Ф. Коршиков

Свободные высокочастотные колебания круглой вязкоупругой пластины с некруговым вырезом

Рассматриваются высокочастотные поперечные колебания круглой однородной пластины толщиной h, ограниченной внешним контуром (окружность радиуса a) и сложным внутренним контуром, форма которого мало отличается от окружности радиуса b (рис.).

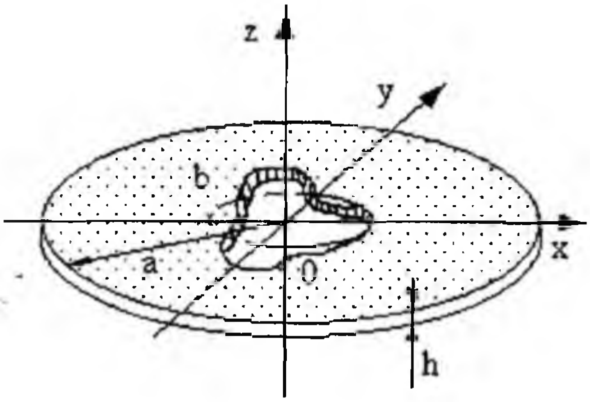

Рис. **Круглая пластина с вырезом, форма которого близка к окружности**

Предполагается, что материал пластины линейно-вязкоупругий. В этом случае колебания пластины подчиняются следующему уравнению [1]:

$$D\Delta^2\left[W-\int_{-\infty}^{t}R(t-\tau)W d\tau\right]+m\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}=0. \qquad (1)$$

где W – прогиб пластины, D – цилиндрическая жесткость на изгиб, R – функция скорости релаксации материала, τ, t – переменные времени, Δ – оператор Лапласа в полярной системе координат, m – поверхностная плотность пластины.

Рассмотрим граничные условия жесткого крепления внешнего и внутреннего контуров:

$$W(r,\theta)\Big|_{r=a}=\frac{\partial W(r,\theta)}{\partial r}\Bigg|_{r=a}=W(r,\theta)\Big|_{r=r_i}=\frac{\partial W(r,\theta)}{\partial r}\Bigg|_{r=r_i}=0,\ r_i=b(1+\varepsilon f(\theta)).$$

Здесь r_i – радиус-вектор, описывающий внутренний контур, ε – малый параметр, характеризующий максимальное отклонение точек внутреннего контура от концентрической окружности радиуса b, $f(\theta)$ – некоторая гладкая функция ($f\sim 1$ при $\varepsilon\to 0$).

Если решение уравнения (1) представить в виде [1]:

$$W = w(r,\theta)e^{i\Omega t},$$

где $w(r,\theta)$ - координатная часть прогиба, r,θ - полярные координаты, Ω - комплексная частота, то (1) с соответствующими граничными условиями можно свести к краевой задаче:

$$\Delta^2 w(r,\theta)-\frac{\Omega^2 w(r,\theta)}{1-\int\limits_0^\infty R(t)e^{-i\Omega t}dt}=0, \tag{2}$$

$$w(r,\theta)\Big|_{r=a}=\frac{\partial w(r,\theta)}{\partial r}\Bigg|_{r=a}=w(r,\theta)\Big|_{r=r_i}=\frac{\partial w(r,\theta)}{\partial r}\Bigg|_{r=r_i}=\theta. \tag{3}$$

Решения задачи (2),(3) ищем в виде разложения в ряд по степеням малого параметра ε [2]:

$$w = w_0+\varepsilon w_1+O\left(\varepsilon^2\right), \tag{4}$$

$$\Omega=\Omega_0+\varepsilon\Omega_1+O\left(\varepsilon^2\right),\ \Omega_0=\omega_0+i\alpha_0,\ \Omega_1=\omega_1+i\alpha_1,\ \alpha_0>0. \tag{5}$$

Подставим (4), (5) в (2) и (3), предварительно разложив граничные условия на линии r_i в ряд Тейлора. Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим последовательность краевых задач.

В нулевом приближении краевая задача имеет вид:

$$\Delta^2 w_0-\frac{\Omega_0^2 w_0}{1-A_0+iB_0}=0, \tag{6}$$

$$A_0=\int\limits_0^\infty R(t)e^{\alpha_0 t}\cos(\omega_0 t)dt,\ B_0=\int\limits_0^\infty R(t)e^{\alpha_0 t}\sin(\omega_0 t)dt,$$

$$w_0(a,\theta)=\frac{\partial w_0(a,\theta)}{\partial r}=0,\quad w_0(b,\theta)=\frac{\partial w_0(b,\theta)}{\partial r}=0. \tag{7}$$

Общее решение уравнения (6) имеет вид [3]:

$$w_0(r,\theta)=\sin n\theta\left[AJ_n(kr)+BY_n(kr)+CI_n(kr)+DK_n(kr)\right],$$

где A, B, C, D – произвольные комплексные постоянные, $J_n(kr)$, $K_n(kr)$, $Y_n(kr)$, $I_n(kr)$ – функции Бесселя первого и второго рода, $k^2=\omega_0$.

Решая задачу (6), (7), находим связь частот колебаний упругой и вязкоупругой пластин [4]:

$$\frac{\omega_0^2-\alpha_0^2}{1-A_0(\alpha_0,\omega_0)}=\frac{2\alpha_0\omega_0}{B_0(\alpha_0,\omega_0)},\quad \frac{\omega_0^2-\alpha_0^2}{1-A_0(\alpha_0,\omega_0)}=\left(\omega_0^e\right)^2, \tag{8}$$

где ω_0^e – частота колебаний упругой пластины с концентрическим круговым вырезом, определяемая из системы однородных уравнений:

$$\begin{cases} AJ_n(ka)+BY_n(ka)+CI_n(ka)+DK_n(ka)=0 \\ AJ_n'(ka)+BY_n'(ka)+CI_n'(ka)+DK_n'(ka)=0 \\ AJ_n(kb)+BY_n(kb)+CI_n(kb)+DK_n(kb)=0 \\ AJ_n'(kb)+BY_n'(kb)+CI_n'(kb)+DK_n'(kb)=0 \end{cases} \tag{9}$$

Далее рассмотрим только высокочастотные колебания. Из условия существования нетривиального решения системы (9), с учетом асимптотического представления функций Бесселя [5] для больших значений аргумента (при $u\to\infty$):

$$J_n(u)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi u}}\cos\left(u-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right),$$

$$Y_n(u)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi u}}\sin\left(u-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right),$$

$$I_n(u)\approx\frac{e^u}{\sqrt{2\pi u}};K_n(u)\approx\sqrt{\frac{\pi}{2u}}e^{-z}$$

приходим к уравнению для определения ω_0^e:

$$\cos(k(a-b))\cosh(k(a-b))=1. \tag{10}$$

Из (8), (10) можно найти частоту ω_0 колебаний вязкоупругой пластины с концентрическим круговым вырезом.

В первом приближении имеем краевую задачу с неоднородными граничными условиями:

$$\Delta^2 w_1-\frac{\Omega_0^2 w_1}{1-C_0}=\frac{2\Omega_1\Omega_0 w_0}{1-C_0}+\frac{(A_1-iB_1)\Omega_1\Omega_0^2 w_0}{(1-C_0)^2}, \tag{11}$$

$$A_1=\int_0^\infty tR(t)e^{\alpha_0 t}\sin(\omega_0 t)dt,\quad B_1=\int_0^\infty tR(t)e^{\alpha_0 t}\cos(\omega_0 t)dt.$$

$$w_1(a,\theta)=\frac{\partial w_1(a,\theta)}{\partial r}=w_1(b,\theta)=0,\quad \frac{\partial w_1(b,\theta)}{\partial r}=-\frac{\partial^2 w_0(b,\theta)}{\partial r^2}bf(\theta). \tag{12}$$

Краевая задача (11), (12) является неоднородной задачей на спектре, условием разрешимости которой служит уравнение:

$$\int_0^{2\pi}\left[w_0''(b,\theta)\right]^2 b^2 f(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi}\int_b^a r\varpi_0^2(r)\left[\frac{2\Omega_0\Omega_1}{1-C_0}+\frac{\Omega_1\Omega_0^2 C_1}{\left(1-C_0\right)^2}\right]drd\theta .$$

Отсюда:

$$\Omega_1 = \int_0^{2\pi} b^2\left[w_0''(b,\theta)\right]^2 f(\theta)d\theta\left(\left[\frac{2(\omega_0+i\alpha_0)}{1-A_0+iB_0}+\frac{(\omega_0+i\alpha_0)^2(A_1-iB_1)}{\left(1-A_0+iB_0\right)^2}\right]\int_0^{2\pi}\int_b^a rw_0^2(r)drd\theta\right)^{-1} \quad (13)$$

Отделяя действительную и мнимую части в (13), получаем поправки к частоте колебаний ω_0 и параметру α_0:

$$\omega_1 = \mathrm{Re}\,\Omega_1 = \left(\left[\left(1-A_0\right)^2 - B_0^2\right]\left[A_1\left(\omega_0^2-\alpha_0^2\right)+2\omega_0\left(1-A_0\right)+2\alpha_0\left(\omega_0 B_1 - B_0\right)\right]+\right.$$

$$+\left[\left(1-A_0\right)\ 2B_0\right]\left[B_1\left(\alpha_0^2-\omega_0^2\right)+2\alpha_0\left(1-A_0\right)+2\omega_0\left(B_0+\alpha_0 A_1\right)\right]\Big)\times$$

$$\times\int_0^{2\pi} b^2\left(w_0''(b,\theta)\right)^2 f(\theta)d\theta\left(\left(\left[A_1\left(\omega_0^2-\alpha_0^2\right)+2\omega_0\left(1-A_0\right)+2\alpha_0\left(\omega_0 B_1 - B_0\right)\right]^2+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left[B_1\left(\alpha_0^2-\omega_0^2\right)+2\alpha_0\left(1-A_0\right)+2\omega_0\left(B_0+\alpha_0 A_1\right)\right]^2\right)\int_0^{2\pi}\int_b^a rw_0^2(r)drd\theta\right)^{-1}.$$

$$\alpha_1 = \mathrm{Im}\,\Omega_1 = \left(\left[\left(1-A_0\right)2B_0\right]\left[A_1\left(\omega_0^2-\alpha_0^2\right)+2\omega_0\left(1-A_0\right)+2\alpha_0\left(\omega_0 B_1 - B_0\right)\right]-\right.$$

$$-\left[\left(1-A_0\right)^2 - B_0^2\right]\left[B_1\left(\alpha_0^2-\omega_0^2\right)+2\alpha_0\left(1-A_0\right)+2\omega_0\left(B_0+\alpha_0 A_1\right)\right]\Big)\int_0^{2\pi} b^2\left(w_0''(b,\theta)\right)^2 f(\theta)d\theta\times$$

$$\left(\left(\left[A_1\left(\omega_0^2-\alpha_0^2\right)+2\omega_0\left(1-A_0\right)+2\alpha_0\left(\omega_0 B_1 - B_0\right)\right]^2+\left[B_1\left(\alpha_0^2-\omega_0^2\right)+2\alpha_0\left(1-A_0\right)+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+2\omega_0\left(B_0+\alpha_0 A_1\right)\right]^2\right)\int_0^{2\pi}\int_b^a rw_0^2(r)drd\theta\right)^{-1}.$$

Последующие приближения строятся аналогично, однако точность уравнений и граничных условий для этого являются недостаточными.

Таким образом, в работе с применением асимптотических методов получены соотношения для частоты и декремента свободных высокочастотных колебаний круглой вязкоупругой пластины с некруговым вырезом.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Работнов Ю.Н.*** Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. -712 с.
2. ***Найфэ А.Х.*** Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. - 535 с.
3. ***Бабаков В.К.*** Теория колебаний. М.: Наука, 1968. - 560 с.
4. ***Михасев Г.И.*** О свободных низкочастотных колебаниях вязкоупругих цилиндрических оболочек // Прикл. механика. Т.28, №9, 1992. - 350 с.
5. ***Лебедев Н.Н.*** Специальные функции и их приложения. М.-Л.,Физматгиз,1963.-358с.

S U M M A R Y

Vibrations of the circular visco-elastic plate with cutout is considered in this paper. The shape of the cutout is assumed to closed to a circle. By using perturbation method, highest-frequency vibrations are investigated.