



К исследованию изгибных волн в неоднородной тонкой конической оболочке с учетом внешней нагрузки

В данной работе с использованием метода, развитого в [1-3], исследуются локализованные волновые формы движения тонкой конической оболочки с учетом ее безмоментного напряженного состояния.

На срединной поверхности оболочки введем ортогональную систему координат s, φ , где $s = R^{-1}s'$, s' – расстояние до вершины конуса, R – характерный размер срединной поверхности, φ – координата на направляющей, выбираемая таким образом, чтобы первая квадратичная форма поверхности имела вид $d\sigma^2 = R^2(ds^2 + s^2d\varphi^2)$. При этом радиус кривизны равен $R_2 = Rsk^{-1}(\varphi)$. Оболочка (необязательно замкнутая в окружном направлении) занимает область:

$$s_1(\varphi) \leq s \leq s_2(\varphi), \quad \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2,$$

где функции $s_i(\varphi)$ определяют необязательно плоские кривые.

В предположении о большой изменчивости волн в направлении координаты φ в качестве исходной используем записанную в безразмерном виде систему [4]

$$\varepsilon^4 \Delta(d\Delta W) + \varepsilon^2 \Delta_t W - \Delta_k \Phi + \varepsilon^2 m \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0, \quad \varepsilon^4 \Delta(g^{-1} \Delta \Phi) + \Delta_k W = 0, \quad (1)$$

$$\Delta_t z = \frac{1}{s} \left[\frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(T_2 \frac{\partial z}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial s} \left(T_3 \frac{\partial z}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(T_3 \frac{\partial z}{\partial s} \right) + \frac{\partial}{\partial s} \left(s T_1 \frac{\partial z}{\partial s} \right) \right],$$

$$\Delta z = \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left(s \frac{\partial z}{\partial s} \right), \quad \Delta_k z = (k/s) \frac{\partial^2 z}{\partial s^2},$$

$$W = \varepsilon^4 \frac{W_*}{R}, \quad \Phi = \varepsilon^{-4} \frac{\Phi_*}{h_0 E_0}, \quad t = \frac{t_*}{T_*}, \quad T_*^2 = \varepsilon^{-6} \frac{R^2 \rho_0}{E_0},$$

$$d = \frac{E h^3 (1 - \nu_0^2)}{E_0 h_0^3 (1 - \nu^2)}, \quad g = \frac{E h}{E_0 h_0}, \quad m = \frac{\rho h}{\rho_0 h_0}, \quad \varepsilon^8 = \frac{h_0^2}{12(1 - \nu_0^2) R^2},$$

где W_* , Φ_* – нормальный прогиб и функция напряжений, t_* – время, $h(s, \varphi)$, $E(s, \varphi)$, $\nu(s, \varphi)$, $\rho(s, \varphi)$ – переменные толщина, модуль Юнга, коэффициент Пуассона и плотность материала оболочки соответственно, h_0 , E_0 , ν_0 ,

ρ_0 – характерные значения этих величин, T_* – характерное время, $0 < \varepsilon$ – естественный малый параметр. Безразмерные усилия T_i считаем функциями времени и пространственных координат. Они связаны с начальными усилиями T_i^0 , S^0 соотношениями

$$(T_1^0, T_2^0, S^0) = -E_0 h_0 \varepsilon^6 (T_1, T_2, T_3).$$

Функции $k(\varphi)$, $s_i(\varphi)$, $T_i(s, \varphi, t)$, $d(s, \varphi)$, $g(s, \varphi)$, $m(s, \varphi)$ предполагаются достаточное число раз дифференцируемыми по своим аргументам и вместе со своими производными по переменной φ являются величинами порядка $O(1)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

На краях $s = s_1(\varphi)$, $s = s_2(\varphi)$ рассмотрим условия шарнирного опирания. Удовлетворяя главным граничным условиям с точностью до величин ε^2 , имеем [4]

$$W = \frac{\partial^2 W}{\partial s^2} = 0 \text{ при } s = s_i(\varphi). \quad (2)$$

Следуя [1,2], а также принимая во внимание линейность системы (1), будем искать решение задачи (1), (2) в виде

$$W = \sum_{n=1}^N W_n, \quad \Phi = \sum_{n=1}^N \Phi_n, \quad (3)$$

где W_n , Φ_n – искомые функции, сосредоточенные в момент времени t в окрестности образующей $\varphi = q_n(t)$, где $q_n(t)$ – дважды дифференцируемая функция, такая что $q_n(0) = 0$. Пару функций W_n , Φ_n назовем n -ым волновым пакетом (ВП). Перейдем к подвижной системе координат, связанной с центром n -ого ВП по формуле

$$\varphi = q_n(t) + \varepsilon^{1/2} \xi_n,$$

где ξ_n – новая независимая пространственная переменная.

Формальное асимптотическое решение поставленной задачи будем искать в виде [1-3]

$$\begin{aligned} W_n &= W_n^* F_n, \quad \Phi_n = \Phi_n^* F_n, \\ W_n^* &= \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^{m/2} W_{nm}(s, \xi_n, t), \quad \Phi_n^* = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^{m/2} \Phi_{nm}(s, \xi_n, t), \\ F_n &= \exp \left\{ i \left[\varepsilon^{-1} \int_0^t \omega_n(\tau) d\tau + \varepsilon^{-1/2} p_n(t) \xi_n + \frac{1}{2} b_n(t) \xi_n^2 \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4)$$

где ω_n , p_n , b_n – непрерывно дифференцируемы по t , $\text{Im } b_n(t) > 0$ для любого $t \geq 0$.

Разложим функции, входящие в уравнение (1), в ряды Тейлора по переменной φ в окрестности точки $q_n(t)$. Например, для функции $d(s, \varphi)$ это разложение имеет вид

$$d(s, \varphi) = d(s, q_n(t)) + \varepsilon^{1/2} \xi_n d'(s, q_n(t)) + \frac{1}{2} \varepsilon \xi_n^2 d''(s, q_n(t)) + \dots,$$

где штрих означает дифференцирование по переменной φ .

Подставим анзац (4) в (1) и (2). Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях $\varepsilon^{1/2}$, учитывая разложения в ряды Тейлора функций из (1). В результате придем к последовательности краевых задач.

В нулевом приближении имеем

$$L_{no}w_{no} = 0, \quad (5)$$

$$w_{no} = \partial^2 w_{no} / \partial s^2 = 0 \text{ при } s = s_i[q_n(t)] \quad (6)$$

$$L_{no} = \tilde{L}_{no} - ms[\omega_n - \dot{q}_n p_n]P,$$

$$\tilde{L}_{no} = \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(\frac{s^3 g k^2}{p_n^4} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right) + \frac{dp_n^4}{s^3} - \frac{p_n^2}{s} T_2.$$

Здесь и ниже функции g, k, d, T_2, m и их производные берутся при $\varphi = q_n(t)$.

Рассмотрим уравнение

$$\tilde{L}_{no}z - \lambda msz = 0 \quad (7)$$

Обозначим через $z_n[s, t, p_n(t), q_n(t)]$ и $\lambda_n[t, p_n(t), q_n(t)]$, $n=1, 2, \dots$ соответственно бесконечные системы собственных функций и собственных чисел краевой задачи (7), (6).

Условием существования решения задачи (5), (6) в виде

$$w_{no} = P_{no}(\xi_n, t)z_n[s, t, p_n(t), q_n(t)] \quad (8)$$

(P_{no} – некоторый полином по ξ_n) служит равенство

$$\omega_n = \dot{q}_n p_n \mp H_n[t, p_n(t), q_n(t)],$$

$$H_n = (\lambda_n)^{1/2} \quad (9)$$

где H_n – функция Гамильтона.

Условие разрешимости задачи в первом приближении приводит к системе Гамильтона

$$\dot{q}_n = H_p, \quad \dot{p}_n = -H_q. \quad (10)$$

Нижние индексы p, q, ω здесь и ниже означают дифференцирование по соответствующей переменной. Таким образом, функция Гамильтона H_n определяет динамику ВП.

Процедура отыскания условий разрешимости задач в первом и втором приближениях подробно описана в [2]. Ее результатом наряду с (10) является уравнение Риккати

$$\dot{b}_n + H_{pp}b_n^2 + 2H_{pq}b_n + H_{qq} = 0 \quad (11)$$

для определения функций $b_n(t)$. Амплитудный множитель P_{no} из (8) находится из уравнения

$$a_{no} \frac{\partial^2 P_{no}}{\partial \xi_n^2} + a_{n1} \xi_n \frac{\partial P_{no}}{\partial \xi_n} + a_{n2} \frac{\partial P_{no}}{\partial t} + a_{n3} P_{no} = 0, \quad (12)$$

$$a_{no}(t) = \frac{1}{2} H_{pp}, \quad a_{n1}(t) = i[b_n H_{pp} + H_{pq}], \quad a_{n2} = i,$$

$$a_{n3}(t) = i(2H_n \eta_n)^{-1} [b_n H_{pp} H_n \eta_n - \dot{\omega}_n \eta_n - 2H_p H_q \eta_n + \\ + \ddot{q}_n p_n \eta_n + H_n H_p \int_{s_1(\varphi)}^{s_2(\varphi)} m' s z_n^2 ds - 2p_n \int_{s_1(\varphi)}^{s_2(\varphi)} T_3 \frac{\partial z_n}{\partial s} z_n ds - \\ - p_n \int_{s_1(\varphi)}^{s_2(\varphi)} \frac{\partial T_3}{\partial s} z_n^2 ds + \int_{s_1(\varphi)}^{s_2(\varphi)} (L_p z_q + L_\omega \dot{z}_n + \frac{1}{2} L_{pq} z_n) z_n ds],$$

$$\eta_n(t) = \int_{s_1(\varphi)}^{s_2(\varphi)} msz_n^2 ds.$$

Используя асимптотический метод, описанный в [5], найдем приближенные значения собственных чисел краевой задачи (7), (6) для случая сильно усеченной конической оболочки. Пусть $T_2 = sk^{-1}(\varphi)$ (случай внешнего гидростатического давления) [5]. Положим функции d, g, m независимыми от s . Сделаем замену переменной $s = s_2(\varphi) \cdot (1 - \mu y)$, где $\mu = \frac{s_2(\varphi) - s_1(\varphi)}{\pi \cdot s_2(\varphi)}$ – малый параметр. Задача (7), (6) примет вид

$$\frac{1}{A} \frac{1}{1 - \mu y} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[(1 - \mu y)^3 \frac{\partial^2 z_n}{\partial y^2} \right] + \left(\frac{A}{(1 - \mu y)^4} - \frac{B}{1 - \mu y} - C_n \right) z_n = 0, \quad (13)$$

$$z_n = \partial^2 z_n / \partial y^2 = 0 \text{ при } y = 0, \pi, \quad (14)$$

$$A = \frac{\mu^2 p_n^4 \sqrt{d}}{s_2 k \sqrt{g}}, \quad B = \frac{\mu^2 p_n^2 s_2^2}{k^2 \sqrt{dg}}, \quad C_n = \frac{\mu^2 m s_2^3}{k \sqrt{dg}} \lambda_n.$$

Неизвестные функцию z_n и параметр C_n будем искать в виде

$$z_n = z_0^{(n)}(t, y, \varphi, p_n(t)) + \mu z_1^{(n)}(t, y, \varphi, p_n(t)) + \dots, \quad (15)$$

$$C_n = C_0^{(n)}(t, \varphi, p_n(t)) + \mu C_1^{(n)}(t, \varphi, p_n(t)) + \dots$$

Подставив (15) в (13) и (14), в нулевом приближении имеем

$$z_0^{(n)} = \sin ny, \quad C_0^{(n)} = \frac{n^4}{A} + A - B, \quad n = 1, 2, \dots \quad (16)$$

Условие существования решения краевой задачи, возникающей в первом приближении, приводит к равенству

$$\int_0^\pi \left\{ \frac{2yn^4}{A} \sin ny - \frac{6n^3}{A} \cos ny - [4yA - By - C_1^{(n)}] \sin ny \right\} \sin ny dy = 0, \quad (17)$$

дающему простое соотношение между A, B и $C_1^{(n)}$. Учитывая его и (16), имеем

$$C_n = \frac{n^4}{A} + A - B + \mu \left(-\frac{n^4 \pi}{A} + 2A\pi - \frac{B\pi}{2} \right) + O(\mu^2). \quad (18)$$

$$\text{Напомним, что } \lambda_n = \frac{k \sqrt{dg}}{\mu^2 m s_2^3} C_n.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда фундаментальных исследований республики Беларусь (Грант №Т97-142).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Михасёв Г.И.** О распространении изгибных волн в некруговой цилиндрической оболочке // Изв. РАН МТТ, 1994, №3. С.164-172.
2. **Михасёв Г.И.** Локализованные семейства изгибных волн в некруговой цилиндрической оболочке с косыми краями // Прикл. мат. и мех., 1996. Т.60. №4. С.635-643.
3. **Авдошка И.В., Михасёв Г.И.** Волновые пакеты в тонкой цилиндрической оболочке с учетом воздействия внешних сил // Веснік ВДУ, 1997, №3(5). С.50-54.
4. **Товстик П.Е.** Устойчивость тонких оболочек. М.: Наука, 1995 - 320 с.

5. **Михасёв Г.И.** О локальной потере устойчивости замкнутой в вершине конической оболочки с произвольным краем при равномерном внешнем давлении / Ленингр. ун-т. Л., 1984. - 15 с. Деп. в ВИНТИ. 27.06.84. №4354-84.

S U M M A R Y

By using the complex WKB-method the localized wave forms of motion of joint supported thin conic shell subjected to external forces are studied. The edges of the shell may be not plane. In the case of hardly truncated conic shell and constant pressure the boundary value problem in the first order approximation is solved in the closed form.