УДК.512.542

И.В. Дудкин

О характеризации инъекторов для доминантных классов Фиттинга

В теории конечных разрешимых групп один из ярких результатов – теорема Гашюца-Фишера-Хартли [1] о том, что для произвольного класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ любая конечная разрешимая группа обладает $\mathfrak{F}$-инъекторами и все они попарно сопряжены. В последующем усилия многих исследователей были направлены на поиск характеризаций $\mathfrak{F}$-инъекторов (см., например, [2-4]). При этом большинство содержательных и глубоких результатов было связано с характеризацией нильпотентных инъекторов (N-инъекторов). В частности, Арадом и Чиллагом [4] было установлено, что подгруппа V конечной разрешимой группы G является $\mathfrak{N}$-инъектором каждой собственной подгруппы группы G, содержащей V, тогда и только тогда, когда V $\mathfrak{N}$-инъектор группы G, или V максимальная нильпотентная подгруппа группы G. В настоящей работе указанный результат распространяется на достаточно широкое семейство классов Фиттинга, в общем случае состоящих не только из нильпотентных групп.

Напомним, что если $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга, то есть класс групп, замкнутый относительно нормальных подгрупп и их произведений, то подгруппа V группы G называется $\mathfrak{F}$-инъектором, если для любой нормальной подгруппы N группы G подгруппа $V \cap N$ является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой в N.

Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется доминантным [5] в классе $\mathfrak{G}$ всех конечных групп, если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{G}$ и для каждой конечной группы G любые две ее $\mathfrak{F}$-максимальные подгруппы, содержащие $\mathfrak{F}$-радикал $G_{\mathfrak{F}}$ группы G, сопряжены в G.

Пусть $\check{N} = N \cup \{0, \infty\}$ и $n \in \check{N}$. Подгруппа H группы G (обозначается $H\tau_n G$) называется τ_n-вложенной в G [6], если ее $\mathfrak{N}^n$-корадикал субнормален в G. Пусть $\mathfrak{X}$ – класс групп и $\tau_n\mathfrak{X} = (H\colon H\tau_n G)$. Легко видеть, что для $n=0,1,\infty$ τ_n-замкнутые классы групп – это в точности классы Фиттинга, классы Фишера и наследственные классы групп соответственно.

В работе рассматриваются только конечные разрешимые группы. Для доказательства теоремы мы будем использовать известное свойство радикалов, которое приведем в качестве леммы.

Лемма 1 [6]. *Пусть* $n \in \check{N}$. *Тогда если* H – τ_n-*вложенная собственная подгруппа группы* G, *и* $\mathfrak{F}$ – *класс групп такой, что* $\mathfrak{F} = \langle N_0, \tau_n \rangle \mathfrak{F}$, *то* $H \cap G_{\mathfrak{F}} \subseteq H_{\mathfrak{F}}$.

Лемма 2 (теорема IX.4.1 [5]). *Если* $\mathfrak{F}$ – *доминантный класс Фиттинга, то каждая группа* G *обладает единственным классом сопряженных* $\mathfrak{F}$-*инъекторов, который совпадает в точности с классом* $\mathfrak{F}$-*максимальных подгрупп группы* G, *содержащих ее* $\mathfrak{F}$-*радикал.*

Теорема. *Пусть* $n \in \check{N}$ *и* $\mathfrak{F}$ - *доминантный* τ_n-*замкнутый класс Фиттинга и* G *группа с* τ_n-*вложенными максимальными подгруппами. Если подгруппа* H *группы G является $\mathfrak{F}$-инъектором каждой собственной подгруппы G, содержащей H, то H – максимальная подгруппа G, или H является $\mathfrak{F}$-инъектором G.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть G группа и подгруппа H является $\mathfrak{F}$-инъектором каждой собственной подгруппы G, содержащей H. Предположим от противного, что H не является максимальной подгруппой в G и, что H не является $\mathfrak{F}$-инъектором группы G . Следовательно, существует максимальная подгруппа M такая, что $H \subset M \subset G$.

Пусть $G_{\mathfrak{F}} \subseteq H$. Тогда ввиду того, что H – $\mathfrak{F}$-подгруппа, H будет содержаться в некоторой $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппе R группы G. Но H по условию является $\mathfrak{F}$-инъектором в R, и поэтому H $\mathfrak{F}$-максимальна в R. Следовательно, H=R. Итак, H – $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа в G, содержащая $\mathfrak{F}$-радикал $G_{\mathfrak{F}}$ группы G. Но тогда, ввиду доминантности класса $\mathfrak{F}$, имеем, что H – $\mathfrak{F}$-инъектор группы G. Получили противоречие с тем, что H не является $\mathfrak{F}$-инъектором G.

Предположим, что $H \subset HG_{\mathfrak{F}}$. Если $HG_{\mathfrak{F}} \subset G$, то по условию H – $\mathfrak{F}$-инъектор $HG_{\mathfrak{F}}$. Значит,

$$G_{\mathfrak{F}} \subseteq (HG_{\mathfrak{F}})_{\mathfrak{F}} \subseteq H \text{ и поэтому } HG_{\mathfrak{F}} = H.$$

Последнее противоречит предположению о том, что H – собственная подгруппа группы $HG_{\mathfrak{F}}$.

Таким образом, $HG_{\mathfrak{F}}=G$. Теперь, используя тождество Дедекинда, получаем равенство

$$M = H(M \cap G_{\mathfrak{F}}).$$

Так как M τ_n-вложена в G и $\mathfrak{F}$ – τ_n-замкнутый класс Фиттинга, то по лемме1 $M \cap G_{\mathfrak{F}} \subseteq M_{\mathfrak{F}}$. Но H – $\mathfrak{F}$-инъектор M, следовательно, $M_{\mathfrak{F}} \subseteq H$ и, поэтому, M=H. Получили противоречие с тем, что H не является максимальной подгруппой в G.

Теорема доказана.

Отображение $\mathbf{P} \to$ {классы Фиттинга}, где $\mathbf{P}$ – множество всех простых чисел, называют функцией Хартли или H-функцией [7]. Класс Фиттинга $\mathfrak{H}$ называется классом Хартли [8], если существует такая H-функция h, что $\mathfrak{H} = \cap_{p \in P} h(p)\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{E}_p$. Заметим, что ввиду [8], класс $\mathfrak{H}$ является доминантным.

Следствие 1. Пусть $\mathfrak{H}$ – наследственный класс Хартли. Если H – собственная подгруппа группы G и **M** – любая собственная подгруппа G, содержащая H, то H является $\mathfrak{H}$-инъектором **M** в том и только в том случае, если H – максимальная $\mathfrak{H}$-подгруппа G, или H является $\mathfrak{H}$-инъектором G.

Пусть f – некоторая H-функция,

$$\pi = \mathrm{Supp}\,(f) = \{p \in \mathbb{P} : f(p) \neq \varnothing\} \quad \text{и}$$

$$\mathrm{SLR}(f) = \bigcap\ p \in \pi\ f(p)\,\mathfrak{E}_{p'}$$

Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ определим полулокально, если $\mathfrak{F}$ = SLR(f) для некоторой H-функции f.

Напомним, что H-функцию f называют:

1) полной, если $f(p)\,\mathfrak{N}_p = f(p)$ для всех $p \in \mathbb{P}$;
2) наследственной, если f(p) – наследственный класс Фиттинга для всех $p \in \mathbb{P}$;
3) постоянной, если f(p) = f(q) для всех простых p, $q \in$ Supp (f).

Можно показать, что если $\varnothing \subset \pi = \text{Supp}(f) \subset \mathbb{P}$ и $\mathfrak{F} = SLR(f)$, то $\mathfrak{F}$ является доминантным классом Фиттинга для случая, когда Н-функция f постоянна. В связи с этим вытекает

Следствие 2. Пусть $\varnothing \subset \pi = \text{Supp}(f) \subset \mathbb{P}$, где f – постоянная наследственная Н-функция. Тогда если $\mathfrak{F} = SLR(f)$ и Н собственная подгруппа группы G, то Н является $\mathfrak{F}$-инъектором каждой собственной подгруппы G, содержащей Н, в точности тогда, когда Н – максимальная подгруппа G, принадлежащая $\mathfrak{F}$, или Н является $\mathfrak{F}$-инъектором G.

Следствие 3 (3.Теорема С [4]). Пусть G – группа и Н собственная подгруппа G. Тогда Н является нильпотентным инъектором каждой собственной подгруппы G, содержащей Н, тогда и только тогда, когда Н – нильпотентный инъектор группы G, или Н – максимальная нильпотентная подгруппа G.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Fischer B.,Gashütz W.,Hartley B.*** Injectoren endlicher auflösbarer Gruppen // Math.Z.,1967. Bd.102, N5. S.337-339.
2. ***Hartley B.*** On Fisher's dualization of formation theory // Proc.London.Math. Soc., 1969. Vol.3, N2. P.193-207.
3. ***Fischer B.*** Klassen konjugierter Untergruppen in endlichen auflosbaren Gruppen. Habilitationschrift. Universitat Frankfurt (M), 1966.
4. ***Arad Z., Chillag D.*** Injectors of finite solvable groups // Comm. in Algebra, 1979. Vol.7, N2. P.115-138.
5. ***Doerk K., Hawkes T.*** Finite Soluble Groups // De Gruyter Exp. in Math. Vol.4. Berlin-New-York, 1992. -891 p.
6. ***Müller K.*** Fittingklassen mit zusätzlichen Abschlußeigenschaften // Arch. Math., 1988. Bd.50. S.19-24.
7. ***Воробьев Н.Т.*** О предположении Хоукса для радикальных классов // Сиб. матем. ж., 1996. Т.37, №5. С.1296-1302.
8. ***Воробьев Н.Т.*** Классы Хартли и инъекторы конечных разрешимых групп // Научн. матем. конф.: Тез.докл. Минск, 1995. С.120.

S U M M A R Y

In this paper we give behaviour $\mathfrak{F}$-injectors of finite soluble groups for some dominant Fitting classes. We prove that if H is a $\mathfrak{F}$-injector of every proper subgroup of G containing H then H is either an $\mathfrak{F}$-injector of G or a maximal subgroup of G.