УДК 512.534

М.И. Наумик

О конгруэнциях на полугруппе линейных отношений

Автор продолжает изучение линейных отношений [1], то есть полугруппы частичных многозначных линейных преобразований векторного пространства над телом. В данной работе, используя результаты работ [2, 3], описаны конгруэнции на полугруппе линейных отношений.

1. Предварительные сведения. Пусть V – векторное пространство над произвольным телом F. Бинарное отношение $a \subseteq V \times V$ между элементами множества V называется линейным, если оно является подпространством пространства $V \oplus V$.

Множество $LR(V)$ всех линейных отношений пространства V является, как известно [1], полугруппой относительно операции умножения бинарных отношений.

Ранг линейного отношения $a \in LR(V)$ определяется формулой

$$\mathrm{rank}\ a = \dim \mathrm{pr}_1 a / \ker a.$$

Множество $LR_r(V)$ всех линейных отношений $a \in LR(V)$ таких, что $\mathrm{rank}\ a < r$ образует идеал полугруппы $LR(V)$.

Описание идеалов и эквивалентностей Грина на $LR(V)$ дано в работе [4]. Все остальные необходимые обозначения и определения можно найти в [5].

Приведем описание стабильных конгруэнций на полугруппе $LR_1(V)$, данное в [3]. Для произвольного подпространства $B \subseteq V$ обозначим $W_B = \{(\bar{x}, \bar{0}) \mid \bar{x} \in B\}$. Ясно, что для любого $a \in LR_1(V)$ имеем $a = W_A W_B^{-1}$, где $A = \mathrm{pr}_1 a$, $B = \mathrm{pr}_2 a$.

Конгруэнцию σ на $LR_1(V)$ назовем стабильной, если для любых $W_A W_C^{-1}$, $W_B W_D^{-1} \in LR_1(V)$; $a, b \in LR(V)$ из $W_A W_C^{-1} \sigma W_B W_D^{-1}$ следует $a W_A W_C^{-1} b \ \sigma \ a W_B W_D^{-1} b$.

Пусть σ конгруэнция на $LR_1(V)$. Для любых A и B, удовлетворяющих условию $W_A \sigma W_B$, существуют такие кардинальные числа ν_i, что $\dim A/A \cap B < \nu_i$ и $\dim B/A \cap B < \nu_i$. Максимальное среди этих кардинальных чисел обозначим $\nu(\sigma)$. Для любых C и D, удовлетворяющих условию $W_C^{-1} \sigma W_D^{-1}$, существуют такие кардинальные числа ν'_j, что $\dim C/C \cap D < \nu'_j$ и $\dim D/C \cap D < \nu'_j$. Минимальное среди этих кардинальных чисел обозначим $\nu'(\sigma)$.

Пусть ν и ν' такие кардинальные числа, что $\nu = 1$ или $\nu \geq \aleph_0$, $\nu' = 1$ или $\nu' = \aleph_0$, если V – бесконечномерное векторное пространство и $\nu = 1$ или $\nu = 1 + \dim V$, $\nu' = 1$ или $\nu' = 1 + \dim V$, если V – конечномерное векторное пространство. Определим отношение $\sigma(\nu, \nu')$ на полугруппе $LR_1(V)$ следующим образом: $W_A W_C^{-1} \sigma(\nu, \nu') W_B W_D^{-1}$ тогда и только тогда, когда $\dim A/A \cap B < \nu$, $\dim B/A \cap B < \nu$, $\dim C/C \cap D < \nu'$, $\dim D/C \cap D < \nu'$.

Предложение. Отношение $\sigma(\nu, \nu')$ на полугруппе $LR_1(V)$ является стабильной конгруэнцией. Любая стабильная конгруэнция на $LR_1(V)$ совпадает с одним из отношений $\sigma(\nu, \nu')$.

В работе [2] дано описание конгруэнций на полугруппе преобразований LS(V), т.е. таких линейных отношений a, что $pr_1 a = V$ и coker $a = \overline{0}$.

Пусть τ – некоторая конгруэнция на LS(V). Тогда множество всех элементов полугруппы LS(V), конгруэнтных W_V, образует идеал этой полугруппы и, следовательно, совпадает с $LS_\eta(V)$ ($LS_\eta(V) = \{a \mid \text{rank } a < \eta,\ a \in LS(V)\}$) при некотором η. Далее, кардинальное число η обозначается через $\eta(\tau)$ и называется индексом конгруэнции τ.

2. Основной результат. Пусть τ – произвольная конгруэнция на полугруппе $LS(V) \subset LR(V)$. Будем говорить, что τ и стабильная конгруэнция σ на $LR_1(V)$ согласованы, если $\eta(\tau) \le \nu(\sigma)$, $\eta(\tau) \le \nu'(\sigma)$.

Легко можно показать, что если $\eta(\tau)$ конечно и $\eta(\tau) > 1$, то $\nu(\sigma) = 1 + \dim V$, $\nu'(\sigma) = 1 + \dim V$ в случае конечномерности пространства V и $\aleph_0 \le \nu(\sigma)$, $\aleph_0 \le \nu'(\sigma)$ в случае бесконечномерного пространства V.

Пусть δ – произвольное бинарное отношение на полугруппе S: $a\tilde{\delta}b$ тогда и только тогда, когда существуют такие c, d $\in$ S, $p\delta r$, что $a = cpd$, $b = crd$. Обозначим через $\bar{\delta}$ транзитивное замыкание бинарного отношения $\tilde{\delta}$.

Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема 1. *Пусть* σ *и* τ – *конгруэнции на полугруппах* $LR_1(V)$ *и* LS(V) *соответственно. Если* σ *и* τ *согласованы, то ограничение конгруэнции* $\overline{\sigma \cup \tau}$ *на полугруппе* LS(V) *совпадает с* τ, *а ее ограничение на полугруппе* $LR_1(V)$ *совпадает с* σ. *Обратно, пусть* ρ – *произвольная конгруэнция на полугруппе* LR(V), *тогда ограничение* τ *конгруэнции на полугруппе* LS(V) *и* σ *на полугруппе* $LR_1(V)$ *являются согласованными конгруэнциями и* $\rho = \overline{\sigma \cup \tau}$.

Докажем сначала несколько лемм.

Всюду далее ρ – некоторая конгруэнция на LR(V); ρ_S – ее ограничение на полугруппе LS(V): $\rho_S = \rho \cap (LS(V) \times LS(V))$ и, следовательно, $\bar{\rho}_S \subset \rho$; ρ_0 – ограничение конгруэнции ρ на полугруппе $LR_1(V)$: $\rho_0 = \rho \cap (LR_1(V) \times LR_1(V))$.

Лемма 1. *Если* $a \in LR_{\eta(\rho_S)}(V)$, *то* $a\,\bar{\rho}_S\, W_{pr_1 a}\, W^{-1}_{\text{coker } a}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о осуществляется непосредственной проверкой.

Лемма 2. *Пусть* $a\rho b$ *и* rank $b = 0$, *тогда* rank $a < \eta(\rho_S)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о снова осуществляется непосредственной проверкой.

Лемма 3. *Пусть* $a\rho b$. *Если* rank $b < \eta(\rho_S)$, *то* rank $a < \eta(\rho_S)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о легко следует из лемм 1 и 2.

Лемма 4. *Пусть* a, b $\in$ LR(V) *и* rank $a < \eta(\rho_S)$. *При этом* $a\rho b$ *тогда и только тогда, когда* $W_{pr_1 a}\, W^{-1}_{\text{coker } a}\, \rho_0\, W_{pr_1 b}\, W^{-1}_{\text{coker } b}$ *и* rank $b < \eta(\rho_S)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из лемм 1 и 3.

Лемма 5. *Пусть* A, B, C, D – *некоторые подпространства пространства* V *и* $\dim A/A \cap B < \eta(\rho_S)$, $\dim B/A \cap B < \eta(\rho_S)$, $\dim C/C \cap D < \eta(\rho_S)$, $\dim D/C \cap D < \eta(\rho_S)$. *Тогда* $W_A W_C^{-1}\, \bar{\rho}_S\, W_B W_D^{-1}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о этой леммы тоже проводится непосредственной проверкой.

Лемма 6. *Если* rank $a < \eta(\rho_S)$, *то* $a\bar{\rho}_S b$ *при любом* b, *удовлетворяющем условиям:* rank $b < \eta(\rho_S)$ *и* $\dim pr_j a/pr_j a \cap pr_j b$, $\dim pr_j b/pr_j a \cap pr_j b < \eta(\rho_S)$ $(j = 1, 2)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из лемм 1 и 5.

Следствие. Если ρ_S – универсальная конгруэнция на полугруппе LS(V), то ρ – универсальная конгруэнция на полугруппе LR(V).

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из леммы 6 и $\eta(\rho_S) > \dim V$.

Лемма 7. *Пусть* ρ – *конгруэнция на полугруппе* LR(V), $a\rho b$, rank a $\geq \eta(\rho_S)$ *и множество*

$$N_e = \{\alpha e \mid \alpha \in Q, \text{rank } e = \text{rank } a\},$$

где e – *идемпотент полугруппы* LS(V), Q – *мультипликативная подгруппа центра тела* F, *является классом конгруэнции* ρ_S. *Тогда* $b = \alpha a$ и $a\overline{\rho_S}b$.

Доказательство осуществляется непосредственной проверкой.

Пусть $e \in LS(V)$ – идемпотент конечного ранга $\eta(\rho_S)$; пусть, далее, N_e – нормальная подгруппа группы H_e, являющаяся классом конгруэнции ρ_S и содержащая e.

Лемма 8. *Пусть* a, b $\in$ LR(V), $a\rho b$ *и* rank a = $\eta(\rho_S)$ *конечен. Тогда* a, b *принадлежат одному и тому же* $\mathcal{H}$*-классу полугруппы* LR(V), *т.е.* $pr_1a = pr_1b$, $pr_2a = pr_2b$, ker a = ker b, coker a = coker b, и $a\overline{\rho_S}b$, *причем,* a, b $\in cN_ed$ *при некоторых* c, d $\in D_{\eta(\rho_S)}$.

Доказательство тоже осуществляется непосредственной проверкой.

Пусть ρ_S – конгруэнция бесконечного индекса. Тогда в силу [2] ρ_S определяется последовательностью кардинальных чисел

$$\nu_k < \nu_{k-1} < \ldots < \nu_1 \leq \mu_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_k \leq \dim V = \mu_{k+1}$$

и каждому D-классу D_μ полугруппы LS(V) ставит в соответствие мультипликативную подгруппу Q_μ ненулевых элементов центра тела F.

Лемма 9. *Пусть* ρ_S – *конгруэнция бесконечного индекса* $a \in D_\mu \subset LR(V)$, $\mu \geq \eta(\rho_S)$, *где* $\mu_i \leq \mu \leq \mu_{i+1}$. *Тогда класс конгруэнции* ρ, *содержащий линейное отношение* a, *состоит из элементов* $b \in LR(V)$, *таких, что* $\dim pr_ja/pr_ja \cap pr_jb$, $\dim pr_jb/pr_ja \cap pr_jb < \nu_i$ (j = 1, 2)

$$b^{pr_2a\cap pr_2b}_{pr_1a\cap pr_1b} = \alpha a^{pr_2a\cap pr_2b}_{pr_1a\cap pr_1b} + c,$$

где $b^B_A = \{(\overline{x},\overline{y}) \mid \overline{x} \in A, \overline{y} \in B, (\overline{x},\overline{y}) \in b\}$, $\alpha \in Q_\mu$, $c \in LR_{\nu_i}$ ($pr_1c = pr_1a \cap pr_1b$, $pr_2c = pr_2a \cap pr_2b$), *кроме того,* $a\overline{\rho_S}b$.

Доказательство этой леммы осуществляется непосредственной проверкой.

Обозначим через $\nu(\rho_0)$, $\nu'(\rho_0)$ такие наименьшие кардинальные числа, что для подпространства A, B, C, D $\subseteq$ V, удовлетворяющих условию $W_A W_C^{-1} \rho_0 W_B W_D^{-1}$, выполняются неравенства $\dim A/A\cap B < \nu(\rho_0)$, $\dim B/A\cap B < \nu(\rho_0)$, $\dim C/C\cap D < \nu'(\rho_0)$, $\dim D/C\cap D < \nu'(\rho_0)$. Из леммы 5 следует, что $\eta(\rho_S) \leq \nu(\rho_0)$, $\eta(\rho_S) \leq \nu'(\rho_0)$, т.е. конгруэнции ρ_0 и ρ_S согласованы.

Лемма 10. *Пусть* A, B, C, D – *некоторые подпространства пространства* V. *Если для них выполняются вышеуказанные неравенства, то конгруэнция* ρ_0 *является стабильной.*

Доказательство осуществляется непосредственной проверкой.

Лемма 11. *Пусть* τ – *произвольная конгруэнция на полугруппе* LS(V), σ – *стабильная конгруэнция на полугруппе* $LR_1(V)$, *и они согласованы. Тогда* $\rho = \overline{\tau \cup \sigma}$ – *конгруэнция на полугруппе* LR(V) *и выполняются следующие соотношения:* $\rho_S = \tau$, $\rho_0 = \sigma$.

Доказательство осуществляется непосредственной проверкой.

Перейдем к непосредственному доказательству теоремы 1.

Если τ и σ согласованы, то ограничение конгруэнции $\overline{\tau \cup \sigma}$ на полугруппе $LS(V)$ совпадает с τ, а ее ограничение на $LR_1(V)$ совпадает с τ в силу леммы 11.

Пусть теперь ρ – произвольная конгруэнция на полугруппе $LR(V)$, $\rho_S = \rho \cap (LS(V) \times LS(V))$, $\rho_0 = \rho \cap (LR_1(V) \times LR_1(V))$, $a\rho b$. Если rank $a < \eta(\rho_S)$, то на основании леммы 1 имеем $a\overline{\rho_S}\, W_{pr_1 a}\, W^{-1}_{\mathrm{co\,ker}\, a}$, $W_{pr_1 b}\, W^{-1}_{\mathrm{co\,ker}\, b}\, \overline{\rho_S} b$, а на основании леммы 4 получим $W_{pr_1 a}\, W^{-1}_{\mathrm{co\,ker}\, a}\, \rho_0\, W_{pr_1 b}\, W^{-1}_{\mathrm{co\,ker}\, b}$. Следовательно $a\overline{\rho_S \cup \rho_0} b$.

Если rank $a \geq \eta(\rho_S)$ и $\eta(\rho_S)$ конечное число, то из лемм 7, 8 и [2] получим $a\overline{\rho_S} b$ и $\overline{\rho_S} \subset \overline{\rho_S \cup \rho_0}$. Если же rank $a = \mu$, $\mu \geq \eta(\rho_S) \geq \aleph_0$, то из леммы 11 имеем $a\overline{\rho_S} b$.

Ранее было отмечено, что конгруэнции ρ_0 и ρ_S согласованы.

Теорема доказана.

Пусть n – натуральное число; ν, ν' – кардинальные числа, равные 1 (при $n=1$) или превосходящие $\aleph_0$ при любом n, Q_μ ($n + 1 \leq \mu \leq \dim V$) – подгруппы мультипликативной группы центра тела F, удовлетворяющие условию $Q_\xi \subseteq Q_\mu$ при $\mu \leq \xi$. Пусть, далее, e – идемпотент некоторого $\mathcal{H}$-класса $H_e \subset D_n$, N_e– нормальный делитель группы N_e, такой, что $Q_{n+1}e \subseteq H_e$. Определим отношение δ_1 на полугруппе $LR(V)$ следующим образом: $a\delta_1 b$ тогда и только тогда, когда

$a, b \in LR_n(V)$ и $\dim pr_1 a / pr_1 a \cap pr_1 b < \nu$, $\dim pr_1 b / pr_1 a \cap pr_1 b < \nu$,

$\dim pr_2 a / pr_2 a \cap pr_2 b < \nu'$, $\dim pr_2 b / pr_2 a \cap pr_2 b < \nu'$,

$a, b \in D_n$ и существуют такие c, $d \in D_n$, что $a, b \in c\, N_e d$ или

$a, b \in D_\mu$ ($\mu > n$) и $b = \alpha a$ при некотором $\alpha \in Q_\mu$.

Пусть k – натуральное число; ν_i, μ_i ($i = 1, 2, \ldots, k$), ν, ν' – кардинальные числа, удовлетворяющие условиям:

1) $\nu_k < \nu_{k-1} < \ldots < \nu_1 \leq \mu_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_k \leq \dim V = \mu_{k+1}$;
2) все ν_i и μ_i бесконечны за исключением, быть может, ν_k , если ν_k конечно, то $\nu_k = 0$;
3) $\mu_1 \leq \nu$, $\mu_1 \leq \nu'$.

Пусть далее Q_μ ($\mu_1 \leq \mu \leq \dim V$) – мультипликативные подгруппы центра тела F такие, что $Q_\mu \subseteq Q_\xi$ при $\xi \leq \mu$. Определим отношение δ_2 на полугруппе $LR(V)$: $a\delta_2 b$ тогда и только тогда, когда $a, b \in LR_{\mu_1}$ и $\dim pr_1 a / pr_1 a \cap pr_1 b < \nu$, $\dim pr_1 b / pr_1 a \cap pr_1 b < \nu$, $\dim pr_2 a / pr_2 a \cap pr_2 b < \nu'$, $\dim pr_2 b / pr_2 a \cap pr_2 b < \nu'$, или $a, b \in D_\mu$ ($\mu_i \leq \mu \leq \mu_{i+1}$),

$$b^{pr_2 a \cap pr_2 b}_{pr_1 a \cap pr_1 b} = \alpha a^{pr_2 a \cap pr_2 b}_{pr_1 a \cap pr_1 b} + c$$

при некоторых $\alpha \in Q_\mu$, $c \in LR_{\nu_1}$ ($pr_1 c = pr_1 a \cap pr_1 b$, $pr_2 c = pr_2 a \cap pr_2 b$) и $\dim pr_j a / pr_j a \cap pr_j b < \nu_i$, $\dim pr_j b / pr_j a \cap pr_j b < \nu_i$ ($j = 1, 2$).

Теорема 2. *Отношения* δ_1 *и* δ_2 *являются конгруэнциями на полугруппе* $LR(V)$. *Всякая конгруэнция на полугруппе* $LR(V)$ *совпадает с одним из отношений типа* δ_1 *или* δ_2 .

Доказательство. Покажем, что δ_1 является конгруэнцией. Определим конгруэнцию конечного индекса τ на полугруппе $LS(V)$ следующим образом: $a\tau b$ тогда и только тогда, когда

$a, b \in LR_n(V)$ или

$a, b \in D_n$ и существуют такие c_1, $d_1 \in D_n$, что

$a, b \in c_1 N_e d_1$ или

$a, b \in D_\mu$ ($\mu > n$) и $b = \alpha a$ при некотором $\alpha \in Q_\mu$.

Пусть σ – конгруэнция на полугруппе $LR_1(V)$ такая, что σ – стабильная и $\sigma=\sigma(\nu, \nu')$. Покажем, что $\delta_1 = \overline{\tau \cup \sigma}$, т.е. δ_1 – конгруэнция. Обозначим $\rho = \overline{\tau \cup \sigma}$. Пусть $a\rho b$ и rank $a < \eta(\tau)$. В силу леммы 11 имеем $\eta(\tau) = \eta(\rho_S)$. Тогда из леммы 4 получим $a\rho b$ тогда и только тогда, когда $W_{pr_1a}W^{-1}_{co\ker a}\,\rho_0\; W_{pr_1b}W^{-1}_{co\ker b}$ и rank $b < \eta(\rho_S)$. Но $\rho_0 = \sigma$. Следовательно, $\nu(\rho_0) = \nu$, $\nu'(\rho_0) = \nu'$; если $a < \eta(\tau)$, то $a\rho b$ тогда и только тогда, когда

$\dim pr_1a/pr_1a \cap pr_1b < \nu$, $\dim pr_1b/pr_1a \cap pr_1b < \nu$,

$\dim pr_2a/pr_2a \cap pr_2b < \nu'$, $\dim pr_2b/pr_2a \cap pr_2b < \nu'$, rank $b < \eta(\tau)$.

Т.е. при условии, что rank $a < \eta(\tau)$, имеем $a\rho b$, тогда и только тогда, когда $a\delta_1 b$.

Пусть теперь rank $a = \eta(\tau)$ и $a\rho b$. Тогда $a, b \in D_n$ и $a, b \in cN_e d$ при некоторых $c, d \in D_n$. В силу определения δ_1 имеем $a\delta_1 b$.

Если rank $a > \eta(\rho_S)$ и $a\rho b$, то, используя лемму 8 и определения ρ и δ_1, получим $a\delta_1 b$. Мы доказали, что $\delta_1 = \rho$, т.е. δ_1 – конгруэнция.

Покажем теперь, что отношение δ_2 является конгруэнцией. В качестве τ_1 возьмем следующую конгруэнцию на полугруппе $LS(V)$: $a\ \tau_1\ b$ тогда и только тогда, когда $a, b \in LR_{\mu_1}$, или

$a, \in D_\mu$ $(\mu_i \le \mu < \mu_{i+1})$ и $b = \alpha a + c$ при некоторых $\alpha \in Q_\mu$,
$c \in LR_{\nu_i}(V)$.

Конгруэнция σ_1 на $LR_1(V)$ определяется так, что σ_1 – стабильная и $\sigma_1=\sigma_1(\nu,\nu')$. Обозначим конгруэнцию $\overline{\tau_1 \cup \sigma_1}$ через ρ_1. В силу леммы 4 и теоремы 1, если rank $a = \eta(\tau_1)$, то $a\rho_1 b$ тогда и только тогда, когда $a\delta_2 b$. В силу леммы, если $a \ge \eta(\tau_1)$, то $a\rho_1 b$ тогда и только тогда, когда $a\delta_2 b$. Значит, $\rho_1 = \delta_2$ и δ_2 является конгруэнцией на $LR(V)$. Из [2] и теоремы 1 из $\overline{\tau \cup \sigma} = \delta_1$, $\overline{\tau_1 \cup \sigma_1} = \delta_2$ получаем, что всякая конгруэнция $LR(V)$ совпадает с одним из отношений типа δ_1 или δ_2. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Маклейн С.*** Алгебра аддитивных отношений // Математика: Сб. переводов., 1963, № 6-7. С. 3-12.
2. ***Шаронова Т.Н.*** Конгруэнции на полугруппах линейных операторов // Докл. АН УССР. Серия А, № 1, 1979. С. 17-19.
3. ***Наумик М.И.*** Конгруэнции на полугруппе нулевых линейных отношений // Теория полугруппы и ее приложения. Саратов: Университетское, 1993, вып. 11. С. 30-35.
4. ***Наумик М.И.*** Стабильные квазипорядки на подполугруппе $LR_1(V)$ и главных факторах полугруппы линейных отношений // Веснік ВДУ, 1998, № 2(8). С. 75-79.
5. ***Клиффорд А., Престон Г.*** Алгебраическая теория полугрупп. М.: Мир, 1972. Т.1. -285 с.

S U M M A R Y

Using the description (classification) of congruences on a semigroup of linear relations of the rank equal to zero and the description (classification) of congruences on the field, the work gives the description of congruences on the semigroup of all the linca relations.