УДК 512.548

А.М. Гальмак

Полуабелевые n-арные группы с идемпотентами

Известно, что при переходе от групп к n-арным группам возможны различные обобщения абелевости, среди которых самым широким является полуабелевость. Поэтому, распространяя результаты об абелевых группах на произвольные n-арные группы, естественно пытаться это делать сразу для полуабелевых n-арных групп.

Такой подход реализован в данной работе при получении ее основного результата – n-арного аналога теоремы о разложении абелевой группы в прямое произведение своих силовских подгрупп. При этом, в качестве n-арного аналога внутреннего прямого произведения подгрупп, используется введенное С.А. Русаковым a-прямое произведение n-арных подгрупп n-арной группы, предполагающее наличие в последней идемпотентного элемента. По этой причине в работе рассматриваются только полуабелевые n-арные группы с идемпотентами.

Определение [1]. n-Арная группа $< A, [\ ] >$, содержащая идемпотент a, называется a-прямым произведением своих n-арных подгрупп $< B_1, [\ ] >, \ldots, < B_m, [\ ] >$, если при $m = 1$ $A = B_1$, а при $m \geq 2$:

1) $< B_i, [\ ] >$ – полуинвариантна в $< A, [\ ] >$ ($i = 1, \ldots, m$);

2) $A = [B_1 \underbrace{B_2 \ldots B_2}_{n-1} \ldots \underbrace{B_m \ldots B_m}_{n-1}]$;

3) $[B_1 \underbrace{B_2 \ldots B_2}_{n-1} \ldots \underbrace{B_{r-1} \ldots B_{r-1}}_{n-1}] \cap B_r = \{a\}$

для любого $r = 2, \ldots, m$.

Если n-арная группа $< A, [\ ] >$ является a-прямым произведением своих n-арных подгрупп $< B_1, [\ ] >, \ldots, < B_m, [\ ] >$, то будем употреблять обозначение

$$< A, [\ ] > = < B_1, [\ ] > \overset{a}{\times} \ldots \overset{a}{\times} < B_m, [\ ] >.$$

Для всякого элемента a n-арной группы $< A, [\ ] >$ определим на A бинарную операцию

$$x@y = [x\alpha y],$$

где α – обратная последовательность для элемента a. Легко проверяется (см., например, предложение 7.2 из [2]), что $< A, @ >$ – группа с единицей a. Если a – идемпотент, то в качестве обратной последовательности можно взять последовательность $\underbrace{a \ldots a}_{n-2}$. В этом случае операция @ определяется равенством

$$x@y = [x \underbrace{a \ldots a}_{n-2} y].$$

Лемма 1. Если $< B_1, [\ ] >, \ldots, < B_m, [\ ] >$ – n-арные подгруппы n-арной группы $< A, [\ ] >$, содержащие элемент $a \in A$, то

$$[B_1 \underbrace{B_2 \ldots B_2}_{n-1} \ldots \underbrace{B_m \ldots B_m}_{n-1}] = B_1 @ B_2 @ \ldots @ B_m,$$

где $< B_1, @ >, \ldots, < B_m, @ >$ – подгруппы группы $< A, @ >$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $a \in B_i$, то $< B_i, @ >$ – подгруппа в $< A, @ >$ для любого $i = 1, \ldots, m$. Используя нейтральность последовательности αa и учитывая $a \in A$, а также то, что $< B_i, [\ ] >$ – n-арная подгруппа в $< A, [\ ] >$, получим

$$[B_1 \underbrace{B_2 \ldots B_2}_{n-1} \ldots \underbrace{B_m \ldots B_m}_{n-1}] =$$

$$= [B_1 \alpha a \underbrace{B_2 \ldots B_2}_{n-1} \alpha a \underbrace{B_3 \ldots B_3}_{n-1} \ldots \alpha a \underbrace{B_m \ldots B_m}_{n-1}] =$$

$$= [B_1 \alpha [a \underbrace{B_2 \ldots B_2}_{n-1}] \alpha [a \underbrace{B_3 \ldots B_3}_{n-1}] \ldots \alpha [a \underbrace{B_m \ldots B_m}_{n-1}]] =$$

$$= [B_1 \alpha B_2 \alpha B_3 \ldots \alpha B_m] = B_1 @ B_2 @ \ldots @ B_m,$$

то есть

$$[B_1 \underbrace{B_2 \ldots B_2}_{n-1} \ldots \underbrace{B_m \ldots B_m}_{n-1}] = B_1 @ B_2 @ \ldots @ B_m.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. Если $a \in B$, то n-арная подгруппа $< B, [\ ] >$ n-арной группы $< A, [\ ] >$ – полуинвариантна в ней тогда и только тогда, когда подгруппа $< B, @ >$ инвариантна в группе $< A, @ >$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как

$$[x \underbrace{B \ldots B}_{n-1}] = [x \alpha a \underbrace{B \ldots B}_{n-1}] = [x \alpha [a \underbrace{B \ldots B}_{n-1}]] = [x \alpha B] = x @ B,$$

$$[\underbrace{B \ldots B}_{n-1} x] = [\underbrace{B \ldots B}_{n-1} a \alpha x] = [[\underbrace{B \ldots B}_{n-1} a] \alpha x] = [B \alpha x] = B @ x$$

для любого $x \in A$, то

$$[x \underbrace{B \ldots B}_{n-1}] = [\underbrace{B \ldots B}_{n-1} x]$$

тогда и только тогда, когда

$$x @ B = B @ x.$$

Лемма доказана.

Следующая лемма является следствием леммы 1 и леммы 2.

Лемма 3. n-Арная группа $< A, [\ ] >$ является a-прямым произведением своих n-арных подгрупп $< B_1, [\ ] >, \ldots, < B_m, [\ ] >$ тогда и только тогда, когда группа $< A, @ >$ является прямым произведением своих подгрупп $< B_1, @ >, \ldots, < B_m, @ >$, то есть

$$< A, [\ ] > = < B_1, [\ ] > \overset{a}{\times} \ldots \overset{a}{\times} < B_m, [\ ] >$$

тогда и только тогда, когда

$$< A, @ > = < B_1, @ > \times ... \times < B_m, @ >.$$

Теорема 1. *Конечная полуабелевая* n-*арная группа* < A, [ ] > *порядка* $|A| = p_1^{\alpha_1} ... p_m^{\alpha_m}$ ($p_1, ..., p_m$ – *простые*), *содержащая идемпотент* a, *единственным образом разлагается в* a-*прямое произведение*

$$< A, [\,] > = < A(p_1), [\,] > \overset{a}{\times} ... \overset{a}{\times} < A(p_m), [\,] > \qquad (*)$$

своих p_i-*силовских* (i = 1, ..., m) n-*арных подгрупп* < $A(p_i)$, [ ] >.

Доказательство. Из полуабелевости n-арной группы < A, [ ] > вытекает абелевость группы < A, @ >, которая по соответствующей бинарной теореме разлагается в прямое произведение

$$< A, @ > = < A(p_i), @ > \times ... \times < A(p_m), @ > \qquad (**)$$

своих p_i-силовских (i = 1, ..., m) n-арных подгрупп < $A(p_i)$, @ >.

Легко проверяется, что преобразование

$$x \rightarrow [ax\underbrace{a...a}_{n-2}]$$

является автоморфизмом группы < A, @ >. Отсюда, с учетом характеристичности силовских подгрупп в абелевой группе, получаем

$$[aA(p_i)\ \underbrace{a...a}_{n-2}] = A(p_i)$$

для любого i = 1, ..., m. Применяя теперь следствие из [3], заключаем, что < $A(p_i)$, [ ] > – n-арная подгруппа n-арной группы < A, [ ] >. Ясно, что < $A(p_i)$, [ ] > – p_i-силовская в < A, [ ] >.

Применяя к разложению (**) лемму 3, получаем разложение (*) n-арной группы < A, [ ] > в a-прямое произведение своих p_i-силовских n-арных подгрупп.

Предположим, что

$$< A, [\,] > = < A'(p_1), [\,] > \overset{a}{\times} ... \overset{a}{\times} < A'(p_m), [\,] >$$

еще одно разложение n-арной группы < A, [ ] > в a-прямое произведение своих p_i-силовских n-арных подгрупп < $A'(p_i)$, [ ] >, содержащих идемпотент a, отличное от разложения (*). Это означает, что существует, по крайней мере, один индекс j такой, что $A(p_j) \neq A'(p_j)$, откуда, учитывая $a \in A(p_j)$, $a \in A'(p_j)$, заключаем, что < $A(p_j)$, @ > и < $A'(p_j)$, @ > – различные p-силовские подгруппы группы < A, @ >, что невозможно в силу единственности p_j-силовской подгруппы в абелевой группе < A, @ >. Следовательно, предположение о существовании двух различных разложений неверно. Теорема доказана.

Согласно утверждению 3) теоремы 5.2 из [1], n-арная группа < A, [ ] >, являющаяся a-прямым произведением своих подгрупп < B_1, [ ] >, ..., < B_m, [ ] >, изоморфна прямому произведению

$$< B_1, [\,] > \times ... \times < B_m, [\,] >.$$

Поэтому справедливо

Следствие 1. Конечная полуабелевая n-арная группа < A, [ ] > порядка $|A| = p_1^{\alpha_1} ... p_m^{\alpha_m}$ ($p_1, ..., p_m$ – простые), содержащая идемпотент a, изоморфна прямому произведению $< A(p_1), [\,] > \times \ldots \times < A(p_m), [\,] >$ своих p_i-силовских (i = 1, ..., m) n-арных подгрупп $< A(p_i), [\,] >$, содержащих идемпотент a.

Так как конечная n-арная группа, порядок которой взаимно прост с n-1, обладает, по крайней мере, одним идемпотентом [1], то имеют место следующие два следствия

Следствие 2. Конечная полуабелевая n-арная группа $< A, [\,] >$ порядка $|A| = p_1^{\alpha_1} \ldots p_m^{\alpha_m}$ ($p_1, \ldots, p_m$ – простые), взаимно простого с n-1, единственным образом разлагается в a-прямое произведение своих p_i-силовских (i = 1, ..., m) n-арных подгрупп для любого идемпотента $a \in A$.

Следствие 3. Конечная полуабелевая n-арная группа $< A, [\,] >$ порядка $|A| = p_1^{\alpha_1} \ldots p_m^{\alpha_m}$ ($p_1, \ldots, p_m$ – простые), взаимно простого с n-1, изоморфна прямому произведению своих p_i-силовских (i = 1, ..., m) n-арных подгрупп, содержащих идемпотент $a \in A$.

Ясно, что конечная полуабелевая n-арная группа, обладающая единственным идемпотентом, единственным образом разлагается в прямое произведение (внутреннее) своих силовских n-арных подгрупп. А так как конечная абелевая n-арная группа, порядок которой взаимно прост с n-1, обладает единственным идемпотентом [1], то имеет место

Следствие 4. Конечная абелевая n-арная группа $< A, [\,] >$ порядка $|A| = p_1^{\alpha_1} \ldots p_m^{\alpha_m}$ ($p_1, \ldots, p_m$ – простые), взаимно простого с n-1, единственным образом разлагается в прямое произведение (внутреннее) своих p_i-силовских (i = 1, ..., m) n-арных подгрупп.

В [4] установлено, что тернарная группа $< B_n, [\,] >$ отражений правильного n-угольника является полуабелевой, и все ее элементы – идемпотенты. Поэтому имеет место

Следствие 5. Если $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_m^{\alpha_m}$ ($p_1, \ldots, p_m$ – простые), b_j – фиксированный элемент из B_n (j = 1, ..., n), то тернарная группа $< B_n, [\,] >$ единственным образом разлагается в b_j-прямое произведение

$$< B_n, [\,] > = < B(p_1), [\,] > \overset{bj}{\times} \ldots \overset{bj}{\times} < B(p_m), [\,] >$$

своих p_i-силовских (i = 1, ..., m) тернарных подгрупп $< B(p_i), [\,] >$.

Пример. Пусть $< B_6, [\,] >$ – тернарная группа отражений правильного шестиугольника, все тернарные подгруппы которой исчерпываются тремя тернарными подгруппами

$$< K_1 = \{b_1, b_4\}, [\,] >, \quad < K_2 = \{b_2, b_5\}, [\,] >, \quad < K_3 = \{b_3, b_6\}, [\,] >$$

второго порядка и двумя подгруппами

$$< H_1 = \{b_1, b_3, b_5\}, [\,] >, \quad < H_2 = \{b_2, b_4, b_6\}, [\,] >$$

третьего порядка. Так как $|B_6| = 6$, то все перечисленные тернарные подгруппы являются силовскими. Все элементы в $< B_6, [\,] >$ являются идемпотентами, а сама она – полуабелева. Выпишем для каждого $b_j \in B_6$ (j = 1, ..., 6) соответствующее прямое разложение.

$$B_6 = \{b_1, b_4\} \overset{b_1}{\times} \{b_1, b_3, b_5\} = \{b_2, b_5\} \overset{b_2}{\times} \{b_2, b_4, b_6\} =$$

$$= \{b_3, b_6\} \overset{b_3}{\times} \{b_1, b_3, b_5\} = \{b_1, b_4\} \overset{b_4}{\times} \{b_2, b_4, b_6\} =$$

$$= \{b_2, b_5\} \overset{b_5}{\times} \{b_1, b_3, b_5\} = \{b_3, b_6\} \overset{b_6}{\times} \{b_2, b_4, b_6\},$$

Отметим, что если в полуабелевой n-арной группе отсутствуют идемпотенты, то она не только не разлагается в a-прямое произведение своих силовских n-арных подгрупп, но в ней вообще могут отсутствовать силовские n-арные подгруппы. Это вытекает из теоремы 1.7.4 [1], согласно которой существуют конечные циклические n-арные группы, являющиеся очевидно полуабелевыми, не обладающие ни одной n-арной подгруппой, в том числе и идемпотентами.

В следующей теореме, обобщающей теорему 1, через $\pi(A)$, как обычно, обозначается множество всех простых делителей порядка $|A|$ n-арной группы $< A, [\ ] >$.

Теорема 2. *Пусть* $< A, [\ ] >$ – *конечная полуабелевая* n-*арная группа, содержащая идемпотент* a;

$$\pi(A) = \pi_1 \cup ... \cup \pi_m, \quad \pi_i \cap \pi_j = \varnothing \ (i \neq j).$$

Тогда $< A, [\ ] >$ *единственным образом разлагается в* a-*прямое произведение*

$$< A, [\ ] > = < A(\pi_1), [\ ] > \overset{a}{\times} ... \overset{a}{\times} < A(\pi_m), [\ ] >$$

своих π_i-*холловских* (i = 1, ..., m) n-*арных подгрупп* $< A(\pi_i), [\ ] >$.

Доказательство теоремы 2 дословно повторяет доказательство теоремы 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Русаков С.А.*** Алгебраические n-арные системы. Мн.: Навука і тэхніка, 1992. -264 с.
2. ***Гальмак А.М.*** Теоремы Поста и Глускина-Хоссу. Гомель: ГГУ им. Ф.Скорины, 1997. - 85 с.
3. ***Гальмак А.М.*** Аналоги теоремы Поста // VII Белорусская мат. конф.: Тез. докл. Минск, 1996. С. 61-62.
4. ***Гальмак А.М.*** Тернарные группы отражений // Междунар. мат. конф.: Тез. докл. Гомель, 1994. С.33.

S U M M A R Y

The main result of the present paper is the following: Let $< A, [\ ] >$ *be a* semiabelian n-*ary group*, $|A| = p_1^{\alpha_1} ... p_m^{\alpha_m}$ ($p_1, ..., p_m$ – *primes). Then for every idempotent* a $\in$ A *there exists a unique a-direct product*

$$< A, [\ ] > = < A(p_1), [\ ] > \overset{a}{\times} ... \overset{a}{\times} < A(p_m), [\ ] >$$

where $< A(p_i), [\ ] >$ *it a* p-*Sylow* n-*ary subgroups of* $< A, [\ ] >$.