УДК 539.3: 534.1

Е.А. Корчевская

Потеря устойчивости некруговой слоистой цилиндрической оболочки при кручении

Рассмотрим тонкую некруговую цилиндрическую оболочку, состоящую из N изотропных слоев, характеризующихся толщиной h_k, модулем Юнга E_k и коэффициентом Пуассона ν_k, $k = 1,2,\ldots,N$. В качестве исходной поверхности примем срединную поверхность оболочки, которую отнесем к криволинейным ортогональным координатам α_1= Rs, α_2= Rφ. Здесь R – радиус цилиндра исходной поверхности, φ и s – окружная и продольная координаты соответственно. Рассмотрим задачу о потере устойчивости цилиндрической оболочки средней длины при кручении.

Введем обозначения

$$S^0 = \lambda E h \varepsilon^5 t_3^0, \tag{1}$$

где S^0 – усилия сдвига.

Будем считать, что физические характеристики слоев различаются незначительно. Тогда для описания локальной бифуркации безмоментного напряженного состояния используем систему полубезмоментных уравнений слоистых оболочек [1]

$$\varepsilon^4\left(1-\varepsilon^3\tau\Delta\right)\Delta^2\chi + k(\varphi)\frac{\partial^2 F}{\partial s^2} - \lambda\left(t_1^0\frac{\partial^2}{\partial s^2} + 2\varepsilon t_3^0\frac{\partial^2}{\partial s\partial\varphi} + \varepsilon^2 t_2^0\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)\left(\chi - \varepsilon^3\kappa\Delta\chi\right) = 0$$

$$\varepsilon^4\Delta^2 F - k(\varphi)\frac{\partial^2}{\partial s^2}\left(\chi - \varepsilon^3\kappa\Delta\chi\right) = 0, \qquad (2)$$

записанную в безразмерном виде, где Δ – оператор Лапласа в криволинейной системе координат φ, s , F,χ – функции напряжений и перемещений, $\lambda > 0$ - параметр нагружения, ε – малый параметр, характеризующий тонкостенность оболочки. Здесь τ,κ – параметры, учитывающие осредненные эффекты поперечных сдвигов и вводятся по формулам

$$K/\pi^2 = \varepsilon^3\kappa,\ K\theta/\pi^2 = \varepsilon^3\tau,\ \kappa,\tau \sim 1 \text{ при } \varepsilon \to 0, \qquad (3)$$

где [1]

$$K = \pi^2 h^2/\left(bR^2\right),\ \theta = 1 - \frac{\eta_2^2}{\eta_1\eta_3},\ b = \frac{12\left(1-\nu^2\right)q_{44}}{Eh\eta_1},$$

$$\eta_1 = \sum_{k=1}^{N}\varsigma_k^{-1}\pi_{1k}\gamma_k - 3c_{12}^2,\ \eta_2 = \sum_{k=1}^{N}\varsigma_k^{-1}\pi_{2k}\gamma_k - 3c_{13}c_{12},$$

$$\eta_3 = 4\sum_{k=1}^{N}\left(\varsigma_k^2 + 3\zeta_{k-1}\zeta_k\right)\gamma_k - 3c_{13}^2,\ \gamma_k = \frac{E_k h_k}{1-\nu_k^2}\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{E_k h_k}{1-\nu_k^2}\right)^{-1},$$

$$c_{12} = \sum_{k=1}^{N}\varsigma_k^{-1}\pi_{3k}\gamma_k,\ c_{13} = \sum_{k=1}^{N}\left(\zeta_{k-1}+\zeta_k\right)\gamma_k,\ G_k = \frac{E_k}{2\left(1+\nu_k\right)},$$

$$q_{44} = \frac{\left[\sum_{k=1}^{N}\left(\lambda_k - \frac{\lambda_{k0}^2}{\lambda_{kk}}\right)\right]^2}{\sum_{k=1}^{N}\left(\lambda_k - \frac{\lambda_{k0}^2}{\lambda_{kk}}\right)G_k^{-1}} + \sum_{k=1}^{N}\frac{\lambda_{k0}^2}{\lambda_{kk}}G_k, \qquad \lambda_k = \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} f_0(z)dz,$$

$$\lambda_{kn} = \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} f_k(z)f_n(z)dz,\ \frac{1}{12}h^3\pi_{1k} = \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} g^2(z)dz,\ \frac{1}{12}h^3\pi_{2k} = \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} zg(z)dz,$$

$$\frac{1}{2}h^2\pi_{3k} = \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} g(z)dz,\ h\varsigma_k = h_k,\ h\zeta_n = \delta_n,$$

$$f_0(z) = \frac{1}{h^2}\left(z-\delta_0\right)\left(\delta_N - z\right),\ f_k(z) = \frac{1}{h_k^2}\left(z-\delta_{k-1}\right)\left(\delta_k - z\right),\ g(z) = \int_0^z f_0(x)dx.$$

В качестве граничных условий на краях рассмотрим условия шарнирного опирания

$$F = \Delta F = \chi = \Delta\chi = \Delta^2\chi = 0,\ \text{при } s = 0, l. \qquad (4)$$

Задача состоит в определении наименьшего $\lambda > 0$, для которого краевая задача (2), (4) имеет ненулевое решение.

Считаем, что потеря устойчивости происходит в окрестности некоторой образующей $\varphi = \varphi_0$, называемой «слабой образующей». Введем растяжение масштаба в окрестности этой образующей:

$$\varphi = \varphi_0 + \varepsilon^{1/2}\xi . \tag{5}$$

Согласно [2] решение задачи (2), (4) будем искать в виде

$$\chi(s,\varphi,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} \chi_j(\xi, s) \exp\left\{ i\left(\varepsilon^{-1/2} q\xi + \frac{1}{2} a\xi^2 \right)\right\}, \tag{6}$$

где $\chi_j(\xi, s)$ – полиномы по ξ. Функция F ищется в том же виде (6).

Положим

$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon\lambda_1 + \varepsilon^2\lambda_2 + ..., \ \mathrm{Im}\, a > 0. \tag{7}$$

Последнее неравенство гарантирует убывание амплитуды волн вдали от линии $\varphi = \varphi_0$.

Разложим функцию $k(\varphi)$ в ряд в окрестности этой образующей:

$$k(\varphi) = k(\varphi_0) + \varepsilon^{1/2} k'(\varphi_0)\xi + \frac{1}{2} k''(\varphi_0)\xi^2 + \dots . \tag{8}$$

Подставляя (6), (7), (8) в (2), (4), получим последовательность дифференциальных уравнений

$$\sum_{k=0}^{j} H_k X_{j-k} = 0, \ j = 0, 1, 2, \dots , \tag{9}$$

и последовательность соответствующих граничных условий

$$\sum_{k=0}^{j} \Gamma_k^i X_{j-k} = 0, \ i = 0,1 \ j = 0, 1, 2, \dots \text{ при } s = 0, l . \tag{10}$$

Здесь

$$H_0\chi_0 = k^2(\varphi_0)\frac{\partial^4 \chi_0}{\partial s^4} - 2iq^5 \lambda_0 t_3^0 \frac{\partial \chi_0}{\partial s} + q^8 \chi_0 , \tag{11}$$

$$\Gamma_0^0 \chi_0 = \chi_0 = 0 , \ \Gamma_0^1 \chi_0 = \frac{\partial^2 \chi_0}{\partial s^2} = 0 , \text{ при } s = 0, l , \tag{12}$$

а операторы H_k и Γ_k^i при $k \ge 1$ выражаются через производные по q и φ_0 и приведены в [2].

Рассмотрим краевую задачу, возникшую в нулевом приближении:

$$k^2(\varphi_0)\frac{\partial^4\chi_0}{\partial s^4} - 2iq^5\lambda_0 t_3^0\frac{\partial\chi_0}{\partial s} + q^8\chi_0 = 0,$$

$$\chi_0 = \frac{\partial^2\chi_0}{\partial s^2} = 0 \text{ при } s = 0,\ s = l. \tag{13}$$

При фиксированных q и φ_0 наименьшее собственное значение λ_0 будет функцией этих параметров. Положим

$$\lambda_0^0 = \min_{q,\varphi_0}\{f(q,\varphi_0)\} = f(q_0,\varphi_0^0), \tag{14}$$

где параметры q_0, φ_0^0 будут определяться из соотношений

$$\frac{\partial\lambda_0}{\partial q} = \frac{\partial\lambda_0}{\partial\varphi} = 0 \text{ при } q = q_0,\ \varphi = \varphi_0. \tag{15}$$

Предположим, что второй дифференциал f в точке q_0, φ_0 – положительно-определенная квадратичная форма, т.е.

$$d^2 f = \lambda_{qq}dq^2 + 2\lambda_{q\varphi}dqd\varphi + \lambda_{\varphi\varphi}d\varphi^2 > 0, \tag{16}$$

где через $\lambda_{qq}, \lambda_{q\varphi}, \lambda_{\varphi\varphi}$ обозначены производные f по соответствующим переменным при $q = q_0$, $\varphi = \varphi_0$.

Решением краевой задачи (13) будет функция

$$\chi_0(\xi,s) = P_0(\xi)\chi_0^0(s), \tag{17}$$

где $\chi_0^0(s)$ – собственная функция задачи (11)–(12) при условиях (15), $P_0(\xi)$ – пока неопределенная функция.

При $j=1$ и $j=2$ имеем неоднородные краевые задачи.

Во втором приближении имеем уравнение, из которого с учетом граничных условий получаем условие существования решения χ_2

$$-\frac{1}{2}\lambda_{qq}\frac{d^2P_0}{d\xi^2} + b\xi\frac{dP_0}{d\xi} + \left(\eta - \lambda_1 + \frac{1}{2}b + c\xi^2\right)P_0 = 0, \tag{18}$$

где

$$b = -i(a\lambda_{qq} + \lambda_{q\varphi}),\ 2c = a^2\lambda_{qq} - 2a\lambda_{q\varphi} - \lambda_{\varphi\varphi},$$

$$\eta = \frac{(\tau - \kappa)\left(20\lambda_0 - q^2\lambda_{qq}\right)}{8}q^2. \tag{19}$$

Условие $c=0$ необходимо для существования решения уравнения (18) в виде полинома. Из этого условия находим единственную величину a, такую, что $\operatorname{Im} a > 0$

$$a = i\left(\lambda^0_{\varphi\varphi} / \lambda^0_{qq}\right)^{1/2}. \tag{20}$$

При $c=0$

$$\lambda_1 = \lambda_1^{(n)} = b\left(\frac{1}{2} + n\right) + \eta, \quad n = 0,1,\ldots, \tag{21}$$

уравнение (18) имеет решение $P_0(\xi) = H_n(\xi)$, где $H_n(\xi)$ – полином Эрмита n-ой степени. Величина λ_1 минимальна при $n=0$. И в этом случае $H_n(\xi) \equiv 1$. Тогда $\lambda_1^{(0)} = b\frac{1}{2} + \eta$ является наименьшим.

Найденная здесь поправка λ_1 учитывает как эксцентриситет поперечного сечения, так и наличие поперечных сдвигов (зависимость от параметров τ и κ) и обобщает аналогичную формулу, полученную в [2] для изотропной оболочки.

Пример 1. Для примера рассмотрим тонкую трехслойную круговую цилиндрическую оболочку радиусом R=150 мм и длиной L=450 мм. Первый и третий слои имеют одинаковую толщину h_1=h_3=0,3 мм и изготовлены из алюминия, который имеет модуль Юнга 70300 Н/мм^2, плотность 2,7·10^{-6} кг/мм^3 и число Пуассона 0,345. Второй слой толщиной 0,8 мм изготовлен из эпоксидной смолы с модулем Юнга равным 3450 Н/мм^2, плотностью 1,2·10^{-6} кг/мм^3 и числом Пуассона 0,3. Здесь $b=0$, тогда с использованием формул (3), (14), (21) находим λ_0 = 1,91815, λ_1 = -0,02473, λ = 1,91199. Как видно, учет поперечных сдвигов приводит к незначительному уменьшению параметра критической нагрузки. Найдем критическое значение крутящего момента: $M = 2\pi R^2 \mu$, где $\mu = \tau_0 K_*$, а формулы для τ_0 и K_* приведены в [2, с. 192]. Тогда M = 1,166 · 10^7 Н·м.

Пример 2. Теперь рассмотрим кручение некруговой цилиндрической оболочки длиной 300 мм, состоящей из тех же трех слоев. Пусть направляющая имеет форму эллипса с полуосями 50 мм и 15 мм. Для такой оболочки имеем: λ_0 = 2,476, λ_1 = 4,588, λ = 3,590. Критическое значение крутящего момента равно M = 5,793 · 10^6 Н·м.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Григолюк Э.И., Куликов Г.М.*** Многослойные армированные оболочки: Расчет пневматических шин. – М., 1988. – 287 с.
2. ***Товстик П.Е.*** Устойчивость тонких оболочек. – М., 1995. – 320 с.

S U M M A R Y

The problem on torsion of thin composite laminated cylindrical shell consisting of N isotropic layers is considered. Using the complex WKB–method, the two-dimensional boundary-value problem is reduced to the sequence of one-dimensional boundary-value problems. The critical torsion load is found.

Поступила в редакцию 27.05.2004