

Г.И. Михасев, С.А. Ермоченко, В.П. Ситников

О простейшей модели расчета напряженно-деформированного состояния колебательной системы реконструированного среднего уха

Среднее ухо человека представляет собой сложную колебательную систему, состоящую из барабанной перепонки и цепи слуховых косточек – молоточка, наковальни и стремени [1]. При некоторых заболеваниях, например, при отосклерозе [2], подвижность слуховых косточек нарушается. Чаще всего такой патологии подвергается наковальня и (или) стремя. В этом случае путем хирургического вмешательства неподвижное звено заменяется стержнем [2], который одним концом крепится к головке молоточка, а вторым – к головке стремени. Иногда при механических повреждениях мембраны и цепи косточек производится полная реконструкция среднего уха путем установки искусственной мембраны (изготовленной, например, из хрящевой ткани) и введения протеза, заменяющего звено «молоточек-наковальня» [3]. Последний, выполненный из тефлона или драгметалла и имеющий в сечении Т-образную форму, своей пластинкой упирается в мембрану, а другим концом анкируется на головку стремени косточки. В целях надежной фиксации протеза его длина предполагается большей, чем расстояние между головкой стремени и плоскостью мембраны, что приводит к начальной деформации пластины, моделирующей барабанную перепонку, связок овального окна и, как следствие – к появлению напряжений во всей колебательной системе восстановленного уха [4]. Большие значения данных напряжений могут приводить к нежелательным последствиям в послеоперационный период – значительному смещению спектра собственных частот всей колебательной системы среднего уха [5] и релаксации стремени мышца и связок овального окна.

Целью данной работы является расчет статического напряженно-деформированного состояния среднего уха после введения протеза в случае полной реконструкции. Восстановленная мембрана моделируется тонкой круглой упругой пластиной толщиной h , радиуса a с модулем упругости E и коэффициентом Пуассона ν . Введем прямоугольную систему координат $O_s x_u z_u$, поместив начало координат O_s в центр основания стремени (рис. 1), направив ось $O_s z_u$ вдоль оси стремени косточки. Для упрощения задачи введем предположение о том, что ось $O_s z_u$ перпендикулярна пластине и проходит через ее центр O_p .

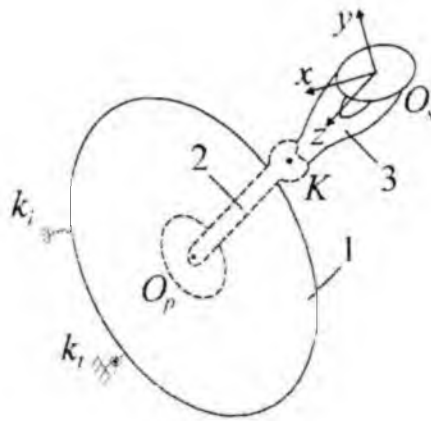


Рис. 1. Среднее ухо после полной реконструкции (упрощенная модель):
1 – искусственная мембрана, 2 – протез, 3 – стремя

Жесткостная матрица, характеризующая физические свойства связки овального окна, приведена в работе [6]. Анализ ее компонентов указывает, что стременинная косточка, лишенная механической связи с наковальной, наиболее податлива перемещению в направлении оси $O_s z$ и повороту вокруг оси $O_s x$. Принимая во внимание данное свойство связок овального окна, а также вводя предположение о наличии сферического шарнира в точке K соединения протеза и стременинной косточки, рассмотрим перемещение звена «протез-стремля» в плоскости $O_s yz$ (рис. 2) после введения протеза.

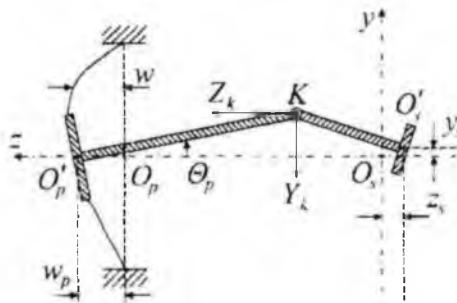


Рис. 2. Предполагаемое положение колебательной системы реконструированного среднего уха после введения протеза

По форме протез напоминает гвоздь, его «шляпка» – круглая пластинка радиуса b . Учитывая, что модуль упругости хряща, из которого изготовлена мембрана, значительно меньше модуля упругости протеза, будем рассматривать последний как абсолютно твердое тело, не испытывающее никаких деформаций.

Пусть w_p , z_s , y_s – поступательные перемещения оснований протеза и стремени в вдоль осей $O_s z$, $O_s y$; θ_p , θ_s – углы их поворотов вокруг оси $O_s x$ (рис. 2), $w(r, \varphi)$ – нормальное перемещение точек пластины, где r , φ – координаты точки пластины в полярной системе координат. Параметры w_p , z_s , y_s , θ_p , θ_s и функция $w(r, \varphi)$ однозначно определяют положение всей механической системы после введения протеза. Для их отыскания следует выписать условия равновесия всех элементов, составляющих систему «пластина-протез-стремля».

Уравнение равновесия тонкой изотропной пластинки имеет вид:

$$\Delta^2 w(r, \varphi) = 0, \quad (1)$$

где Δ – оператор Лапласа в полярной системе координат.

На внешнем контуре пластинки ($r = a$) реализуется условие упругой заделки

$$k_r \cdot w(a, \varphi) = Q_L(a, \varphi), \quad k_t \cdot \frac{\partial w(r, \varphi)}{\partial r} \Big|_{r=a} = M_L(a, \varphi), \quad (2)$$

где k_r, k_t – коэффициенты линейной и изгибной жесткости кольца барабанной перепонки (диапазоны изменения этих параметров приведены в [7]), а $Q_L(r, \varphi), M_L(r, \varphi)$ – перерезывающая сила и изгибающий момент в пластине, определяемые соотношениями:

$$\begin{aligned} Q_L &= -D \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 w(r, \varphi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w(r, \varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w(r, \varphi)}{\partial \varphi^2} \right), \\ M_L &= -D \cdot \left(\frac{\partial^2 w(r, \varphi)}{\partial r^2} + \sigma \cdot \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w(r, \varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w(r, \varphi)}{\partial \varphi^2} \right) \right) \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $\sigma, D = E \cdot h^3 / [12 \cdot (1 - \nu^2)]$ – поверхностная плотность и цилиндрическая жесткость материала пластины (хряща), соответственно. Случай $k_r = k_t = \infty$ соответствует жесткой заделке края.

Будем считать, что основание протеза жестко склеено с пластиной. Тогда по внутреннему контуру пластины ($r = b$), с учетом перемещения основания протеза, выполняются следующие условия:

$$w(b, \varphi) = w_p + \Theta_p \cdot b \cdot \cos \varphi, \quad \frac{\partial w(r, \varphi)}{\partial r} \Big|_{r=b} = 0. \quad (4)$$

Решение уравнения (1) с граничными условиями (2), (4) имеет вид:

$$w(r, \varphi) = w_p \cdot f_0(r) + \Theta_p \cdot f_c(r) \cdot \cos \varphi, \quad (5)$$

где

$$f_0(r) = [C_{11} + C_{12} \cdot r^2 + C_{13} \cdot r^2 \cdot \ln(r/a) + C_{14} \cdot \ln(r/a)] / |C|,$$

$$f_c(r) = [D_{11} \cdot r + D_{12} \cdot r^3 + D_{13} \cdot r^{-1} + D_{14} \cdot r \cdot \ln r] / |D|,$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & b^2 & b^2 \cdot \ln \frac{b}{a} & \ln \frac{b}{a} \\ 0 & 2 \cdot b & b \cdot \left(2 \cdot \ln \frac{b}{a} + 1 \right) & 1 \\ k_{st} & k_{st} \cdot a^2 & \frac{4 \cdot D}{a} & 0 \\ 0 & 2 \cdot (k_{st} \cdot a + D \cdot (\sigma + 1)) & k_{st} \cdot a + D \cdot (\sigma + 3) & \frac{k_a}{a} + \frac{D \cdot (\sigma - 1)}{a^2} \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & b^2 & \frac{1}{b^2} & \ln b \\ i & 3 \cdot b^2 & -\frac{1}{b^2} & \ln b + 1 \\ k_{st} \cdot a & k_{st} \cdot a^3 + 8 \cdot D & \frac{k_{st}}{a} & k_{st} \cdot a \cdot \ln a - \frac{2 \cdot D}{a^2} \\ k_{st} & 3 \cdot k_{st} \cdot a^2 + 2 \cdot a \cdot D \cdot (\sigma + 3) & \frac{2 \cdot D \cdot (1 - \sigma)}{a^3} - \frac{k_{st}}{a^2} & k_{st} \cdot (\ln a - 1) - \frac{D \cdot (\sigma + 1)}{a} \end{bmatrix},$$

а C_{1i}, D_{1i} – алгебраические дополнения матриц C и D соответственно.

Условия равновесия протеза имеют вид:

$$Q_z + Z_k = 0, \quad Q_y - Y_k = 0, \quad (6)$$

$$M_x^{(p)} - Z_k \cdot l_p \cdot \sin \Theta_p + Y_k \cdot l_p \cdot \cos \Theta_p = 0, \quad (7)$$

где l_p – длина протеза, Z_k, Y_k – составляющие силы, действующей на протез со стороны стремени, $Q_y, Q_z, M_x^{(p)}$ – проекции равнодействующей всех перерезывающих сил (4), и главный момент всех сил, действующих на протез со стороны пластины. Здесь

$$Q_y = 2 \cdot \pi \cdot b \cdot D \cdot w_p \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left[f_0(r) + \frac{1}{r} \cdot f_0'(r) \right]_{r=b} \cdot \sin \Theta_p, \quad (8)$$

$$Q_z = -2 \cdot \pi \cdot b \cdot D \cdot w_p \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left[f_0(r) + \frac{1}{r} \cdot f_0'(r) \right]_{r=b} \cdot \cos \Theta_p, \quad (9)$$

$$M_x^{(p)} = -\pi \cdot b \cdot D \cdot \Theta_p \cdot \left\{ f_c(r) + \frac{\sigma}{r} \cdot f_c'(r) - \frac{\sigma}{r^2} \cdot f_c(r) + \right. \\ \left. + b \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left[f_c(r) + \frac{1}{r} \cdot f_c'(r) - \frac{1}{r^2} \cdot f_c(r) \right] \right\}_{r=b}. \quad (10)$$

Уравнения равновесия стремени запишутся в виде:

$$-Z'_k + a_{33} \cdot z_s = 0, \quad Y'_k - a_{22} \cdot y_s = 0, \quad (11)$$

$$Y'_k \cdot l_s \cdot \cos \Theta_s + Z'_k \cdot l_s \cdot \sin \Theta_s + M_x^{(s)} = 0. \quad (12)$$

Здесь $Y'_k = -Y_k, Z'_k = -Z_k$ – силы, действующие на стремя со стороны протеза, l_s – длина стремня, а $M_x^{(s)}$ – момент сил со стороны связки овального окна, определяемый по формуле [6]

$$M_x^{(s)} = a_{42} \cdot y_s + a_{43} \cdot z_s + a_{44} \cdot \Theta_s, \quad (13)$$

где a_{ij} – элементы матрицы, характеризующей жесткость связки овального окна

Уравнения равновесия следует дополнить условием неразрывности звена «протез-стремня»:

$$l_p \cdot \cos \Theta_p + l_s \cdot \cos \Theta_s = w_p + z_s + l, \quad (14)$$

$$l_p \cdot \sin \Theta_p = l_s \cdot \sin \Theta_s + y_s,$$

где l – расстояние между недеформированной пластиной и основанием стремени. Здесь $l < l_p = l_s$.

Выписанные уравнения (6), (7), (11), (12), (14) являются нелинейными относительно неизвестных $w_p, \Theta_p, \Theta_s, y_s, z_s$. Рассмотрим малые перемещения и повороты стремени. Проводя линеаризацию уравнений, из соотношения (8) следует, что $Q_y \approx 0$. Тогда $Y_k \approx 0, y_s \approx 0$. Учитывая малые перемещения и относительно малость элемента a_{43} по сравнению с a_{44} можно пренебречь вторым слагаемым в (13). В этом случае второе уравнение в (14) вырождается в

тождество. В результате приходим к системе из пяти уравнений (6), (7), (11), (14) относительно пяти неизвестных w_p , Θ_p , Θ_s , z_s , Z_k . Решая ее, приходим к соотношениям, соответствующим упрощенной модели:

$$\Theta_p = \Theta_s = 0,$$

$$w_p = [1 - 8 \cdot \pi \cdot D \cdot C_{13} / (a_{33} \cdot |C| + 8 \cdot \pi \cdot D \cdot C_{13})] \cdot (l_p + l_s - l), \quad (15)$$

$$z_s = [8 \cdot \pi \cdot D \cdot C_{13} / (a_{33} \cdot |C| + 8 \cdot \pi \cdot D \cdot C_{13})] \cdot (l_p + l_s - l),$$

$$Z_k = [8 \cdot \pi \cdot D \cdot C_{13} / (|C| + 8 \cdot \pi \cdot D \cdot C_{13} / a_{33})] \cdot (l_p + l_s - l).$$

Таким образом, в предполагаемой упрощенной модели введенный протез раздвигает искусственную барабанную перепонку и стремя, не совершая поворотов.

На рис. 3 приведены графики зависимостей перемещений z_s , w_p стремени и протеза, а также усилия Z_k , возникающего в шарнирном соединении звена «протез-стремя» как функций параметра $\Delta l = l_p + l_s - l$. Вычисления были выполнены при $a = 5 \cdot 10^{-3}$ м, $b = 1 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 10^{-3}$ м, $h = 0,15 \cdot 10^{-3}$ м, $\sigma = 1,2 \cdot 10^3$ кг/м³, $E = 3,3 \cdot 10^7$ Н/м, $\nu = 0,4$, $k_l = 7,55 \cdot 10^4$ Н/м², $k_t = 6,5 \cdot 10^5$ Н, $l = 3,5 \cdot 10^{-3}$ м, $l_s = 2 \cdot 10^{-3}$ м, $l_p = 1,5 \cdot 10^{-3} + 3 \cdot 10^{-3}$ м, $a_{33} = 1,181 \cdot 10^3$, $a_{44} = 3,523 \cdot 10^{-4}$.

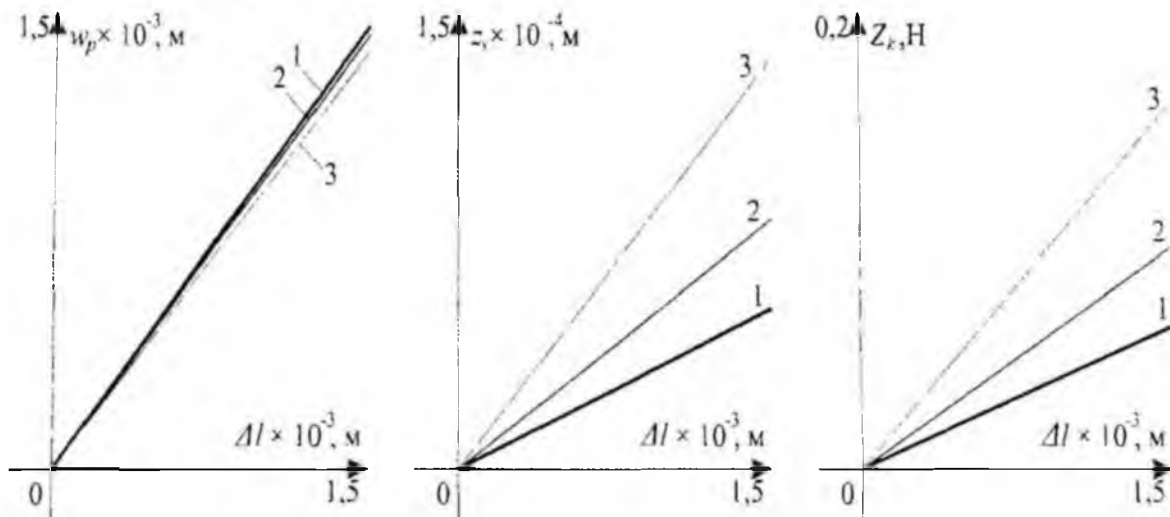


Рис. 3 Графики зависимостей перемещений z_s , w_p стремени и протеза, а также усилия Z_k , возникающего в шарнирном соединении звена «протез-стремя» как функций параметра $\Delta l = l_p + l_s - l$.

1 – графики при $b = 0,001$ м, 2 – графики при $b = 0,0015$ м,
3 – графики при $b = 0,002$ м

Приведенные графики указывают на сильную зависимость перемещения протеза от его длины и слабую податливость стремени.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гельфанд С.А. Слух: введение в психологическую и физиологическую акустику: Пер. с англ. – М., 1984. – 352 с.
2. Ситников В.П., Бизунков А.Б. Щадящий вариант функциональной стапедокластики при отосклерозе // Здоровоохранение, 1997, № 7. – С. 50-51.
3. Sitnikov V.P., Kaushic A. Ossiculoplasty in patients with chronic purulent otitis media // Proc. Int. Otorhinolaryng. Congress, Bratislava, 1998. – P. 84.

4. **Eiber A., Freitag H.-G., Schimanski G., Zenner H.P.** On the coupling of prostheses to the middle ear structure and its influence on sound transfer // *The Function and Mechanics of Normal, Diseased and Reconstructed Middle Ears*, The Hague, The Netherlands: Kugler Publication, 2000. – P. 297–308.
5. **Mikhasev G., Firsov M., Yermochenko S., Sitnikov V.** Modeling of the dynamic behavior of the reconstructed middle ear taking into account its initial strain-stress state // *Book of Abstracts of the Annual Scientific Conference GAMM 2004*, Technische Universität Dresden, Dresden, 2004. – P. 25.
6. **Beer H.-J., Bornitz M., Hardtke H.-J., Schmidt R., Hofmann G., Vogel U., Zahner Th., Hüttenbrink K.-B.** Modeling of components of the human middle ear and simulation of their dynamic behavior // *Audiol Neurootol*, 1999, № 4. – P. 156–162.
7. **Wada H., Koike T., Kobayashi T.** Three-Dimensional finite-element method (FEM) analysis of the human middle Ear // *Middle Ear Mechanics in Research and Otosurgery: Proceedings of the International Workshop on Middle Ear Mechanics in Research and Otosurgery*, Dresden: Univ. of Technology, 1997. – P. 76–82.

S U M M A R Y

Simplified mathematical model for calculation of the static strain-stress state of the reconstructed middle ear is proposed. Simulated mechanical system consists of a thin circular plate made of cartilage, the T-type prosthesis substituting the malleus-incus chain, and the intact stapes. The equations for calculation of the initial displacements of the artificial drum, the stapes footplate, and stresses in the prosthesis-stapedial articulation have been derived.