УДК 519.852

Л.В. Командина

Прямой опорный метод решения специальной задачи дробно-линейного программирования

В данной работе, следуя [1], строится прямой опорный метод для задачи транспортного типа, ограничения которой включают линейные ограничения общего вида, а целевая функция является дробно-линейной. Метод является точным и релаксационным.

1. Постановка задачи. Критерий оптимальности. Рассмотрим сеть $S=\{I,U\}$, где I – множество узлов, U – множество дуг. Каждому узлу $i\in I$ поставим в соответствие число a_i – интенсивность узла, каждой дуге $(i,j)\in U$ припишем числа d_{*ij} и d^*_{ij} – нижнюю и верхнюю пропускные способности. Число x_{ij}, удовлетворяющее неравенству

$$d_{*ij} \le x_{ij} \le d^*_{ij},\ (i,j)\in U, \tag{1}$$

называется дуговым потоком. Совокупность $x = (x_{ij}, (i,j)\in U)$ называется потоком на сети S, если выполняются условия

$$\sum_{j\in I_i^+} x_{ij} - \sum_{j\in I_i^-} x_{ji} = a_i,\ i\in I, \tag{2}$$

$$\sum_{(i,j)\in U} \lambda_{ij}^k x_{ij} = \alpha_k,\ k = \overline{1,l}, \tag{3}$$

где $I_i^+=\{j\in I: (i,j)\in U\}$, $I_i^-=\{j\in I: (j,i)\in U\}$, λ_{ij}^k, α_k, $(i,j)\in U$, $k = \overline{1,l}$ – заданные числа.

Пусть p_{ij} – прибыль от перевозки единицы потока, а c_{ij} – затраты на перевозку единицы потока по дуге $(i,j)\in U$, p и c – побочная прибыль и единовременные затраты процесса перевозок. Тогда рентабельность процесса перевозок выражается дробно-линейной функцией

$$f(x)=\left(\sum_{(i,j)\in U} p_{ij}\, x_{ij} + p\right)\bigg/\left(\sum_{(i,j)\in U} c_{ij}\, x_{ij} + c\right). \tag{4}$$

Рассмотрим задачу максимизации функции цели (4) при ограничениях (1)-(3).

Далее предполагается, что ранг системы (2),(3) равен $|I|-1+l$, и что $\sum_{(i,j)\in U} c_{ij}\, x_{ij} + c>0$ для любого потока. Решение задачи (1)-(4) называется оптимальным планом: $x^o = x^o_{ij}$, $(i,j)\in U$.

Ранее доказано [2], что опорой сети такой задачи является частичная сеть $S_{оп}=\{I,U_{оп}\}$, причем множество $U_{оп}\subset U$ разбивается на два непересекающихся подмножества $U_{1оп}$ и $U_{2оп}$ так, что частичная сеть $S_{1оп}=\{I,U_{1оп}\}$ есть дерево сети S, и $|U_{2оп}|=l$. Каждая дуга $(i,j)\in U_{2оп}$ образует единственный цикл L_{ij} по дугам $S_{1оп}$, направление в котором определяется дугой $(i,j)\in U_{2оп}$. Для каждого цикла подсчитываются числа

$$R_k(L_{ij})= \sum_{(\tau,\rho)\in U} \lambda^k_{\tau\rho}\, sgn(\tau,\rho)^{ij},\ k = \overline{1,l},$$

где

$$sgn(\tau,\rho)^{ij}=\begin{cases} +1, & \text{если } (\tau,\rho) \text{ – прямая дуга в } L_{ij}, \\ -1, & \text{если } (\tau,\rho) \text{ – обратная дуга в } L_{ij}, \\ 0 & \text{если } (\tau,\rho)\notin L_{ij}. \end{cases}$$

Затем составляется матрица

$$D(U_{оп})=\begin{pmatrix} R_k(L_{ij}), & (i,j)\in U_{2оп} \\ k =\overline{1,l} & \end{pmatrix},$$

для которой $R(U_{оп})=\det D(U_{оп})\neq 0$

Пару $\{x,S_{оп}\}$ назовем опорным потоком. Опорный поток невырожденный, если $d_{*ij} < x_{ij} < d^*_{ij}$, $(i,j)\in U_{оп}$. По опоре $S_{оп}$ найдем числа $(r_p)_k$, $k = \overline{1,l}$, и $(u_p)_i$, $i\in I$, из системы

$$\sum_{k=1}^{l} R_k(L_{ij})\,(r_p)_k= \sum_{(\tau,\rho)\in L_{ij}} p_{\tau\rho}\, sgn(\tau,\rho)^{ij}),\ (i,j)\in U_{2оп}, \tag{5}$$

$$(u_p)_i-(u_p)_j=p_{ij} - \sum_{k=1}^{l} \lambda^k_{ij}\,(r_p)_k,\ (i,j)\in U_{1оп}, \tag{6}$$

и числа $(r_c)_k$, $k = \overline{1,l}$, и $(u_c)_i$, $i\in I$, из системы

$$\sum_{k=1}^{l} R_k(L_{ij})\,(r_c)_k= \sum_{(\tau,\rho)\in L_{ij}} c_{\tau\rho}\, sgn(\tau,\rho)^{ij}),\ (i,j)\in U_{2оп}, \tag{7}$$

$$(u_c)_i-(u_c)_j=c_{ij} - \sum_{k=1}^{l} \lambda^k_{ij}\,(r_c)_k,\ (i,j)\in U_{1оп}. \tag{8}$$

Каждая из систем (5) и (7) имеет единственное решение, поскольку ее матрицей коэффициентов является невырожденная матрица $(D(U_{оп}))^T$. Числа $(u_p)_i$,

$(u_c)_i$, $i\in I$ легко находятся по правилам классического метода потенциалов из систем (6) и (8), если положить $(u_p)_1$, $(u_c)_1$ равными нулю.

По найденным числам вычислим оценки неопорных дуг по прибыли

$$(\Delta_p)_{ij} = (u_p)_i-(u_p)_j+\sum_{k=1}^{l} \lambda_{ij}^k (r_p)_k-p_{ij},\ (i,j)\in U_н=U\setminus U_{оп}\,.$$

и по затратам
$$(\Delta_c)_{ij} = (u_c)_i-(u_c)_j+\sum_{k=1}^{l} \lambda_{ij}^k (r_c)_k-c_{ij},\ (i,j)\in U_н$$

и общие оценки

$$\Delta_{ij}=(\Delta_p)_{ij}-f(x)\,(\Delta_c)_{ij},\ (i,j)\in U_н \tag{9}$$

Наряду с потоком x рассмотрим поток $\bar{x}=x+\Delta x$. Приращение потока Δx согласно (2), (3) удовлетворяет системе

$$\begin{cases} \sum\limits_{j\in I_i^+} \Delta x_{ij}-\sum\limits_{j\in I_i^-} \Delta x_{ji}=0,\ i\in I, \\ \sum\limits_{(i,j)\in U} \lambda_{ij}^k\, \Delta x_{ij}=0,\ \overline{1,l}. \end{cases} \tag{10}$$

Следуя [3], можно показать, что приращение целевой функции равно

$$f(x+\Delta x)-f(x)= - \sum_{(i,j)\in U} \Delta_{ij}\, \Delta x_{ij} \Big/ \left(\sum_{(i,j)\in U} c_{ij}\, x_{ij} + c- \sum_{(i,j)\in U_H} (\Delta_c)_{ij}\, \Delta x_{ij}\right). \tag{11}$$

Вектор $l=(l_{ij}, (i,j)\in U)$ называется допустимым направлением для потока x задачи (1)-(4), если найдется такое число $\Theta^0>0$, что все векторы $x(\Theta)=\left(x_{ij}(\Theta)=x_{ij}+\Theta l_{ij}, (i,j)\in U\right)$, где $\Theta\in[0;\Theta^0]$, являются потоками, т.е. для $x(\Theta)$ выполняются (1)-(3).

Используя опору $S_{оп}$, из (10) и (11) получаем

$$\frac{\partial f(x)}{\partial l} = - \sum_{(i,j)\in U_H} \Delta_{ij}\, l_{ij} \Big/ \left(\sum_{(i,j)\in U} c_{ij}\, x_{ij} + c\right). \tag{12}$$

Отсюда следует

Критерий оптимальности. Соотношения

$$\Delta_{ij}\le 0 \text{ при } x_{ij} = d^*_{ij}, \text{ при } x_{ij} = d_{*ij},\ \Delta_{ij}=0 \text{ при } x_{ij}\in(d_{*ij},d^*_{ij}),\ (i,j)\in U_н \tag{13}$$

достаточны, а в случае невырожденности опорного потока и необходимы для его оптимальности.

2. Улучшение потока. Пусть для опорного потока $\{x,S_{оп}\}$ соотношения (13) не выполняются. Заменим его на новый опорный поток $\{\bar{x},\bar{S}_{оп}\}$, для которого $f(\bar{x})\ge f(x)$. Итерация состоит из двух частей: замены потока $x \to \bar{x}$ и замены опоры $S_{оп} \to \bar{S}_{оп}$.

В первой части, следуя классическому симплекс-методу, в качестве допустимого направления l для потока x выберем вектор, вдоль которого достигает максимального значения $\partial f(x)/\partial l$ при симплексной нормировке

$$\sum_{(i,j)\in U_H} |l_{ij}|,$$

т.е. на каждой итерации будем изменять одну неопорную компоненту потока. Для этого на тех дугах, где нарушаются условия (13), отметим число Δ_{ij}, если $x_{ij}=d^*_{ij}$, число $-\Delta_{ij}$, если $x_{ij}=d_{*ij}$, и число $|\Delta_{ij}|$, если $d_{*ij}<x_{ij}<d^*_{ij}$, и выберем среди них

максимальное. Пусть оно определилось на дуге (i_0,j_0). Тогда компоненты l_{ij} допустимого направления находим следующим образом. Полагаем

$$l_{i_0j_0} = -\operatorname{sgn}\Delta_{i_0j_0};\ l_{ij} = 0,\ \text{если}\ (i,j)\in U_н\backslash(i_0,j_0).$$

Для $(i,j)\in U_{2оп}$ компоненты l_{ij} являются единственным решением системы

$$\sum_{(i,j)\in U_{2оп}} R_k(L_{ij})\,l_{ij} = -R_k(L_{i_0j_0}),\ k=\overline{1,l}.$$

Остальные l_{ij}, $(i,j)\in U_{1оп}$, находим из условий баланса (10), где $\Delta x_{ij} = l_{ij}$.

Новый поток $\bar{x}$ строим в виде $\bar{x}_{ij}=x_{ij}+\Theta^0 l_{ij}$, $(i,j)\in U$, где Θ^0 – максимально допустимый шаг вдоль направления l. Очевидно, что ограничения (2), (3) на $\bar{x}$ выполняются. Значит, шаг определим так, чтобы на потоке $\bar{x}$ не нарушались ограничения (1):

$$\Theta^0=\min\Theta_{ij},\ (i,j)\in U_{оп}\cup(i_0,j_0),\ \Theta_{ij}=\begin{cases}(d^*_{ij}-x_{ij})/\,l_{ij}, & \text{если } l_{ij}>0,\\ (d_{*ij}-x_{ij})/\,l_{ij}, & \text{если } l_{ij}<0,\\ \infty & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Пусть значение Θ^0 определилось на дуге (i_*,j_*). Опишем операции по замене опоры:

a) Если $(i_*,j_*)=(i_0,j_0)$, то $\bar{S}_{оп}=S_{оп}$.

b) Если $(i_*,j_*)\neq(i_0,j_0)$ и $(i_*,j_*)\in U_{2оп}$, то $\bar{U}_{1оп}=U_{1оп}$, $\bar{U}_{2оп}=(U_{2оп}\backslash(i_*,j_*))\cup(i_0,j_0)$.

c) Если $(i_*,j_*)\neq(i_0,j_0)$ и $(i_*,j_*)\in U_{1оп}$, $(i_*,j_*)\in L_{i_0j_0}$, то $\bar{U}_{1оп}=(U_{1оп}\backslash(i_*,j_*))\cup(i_0,j_0)$, $\bar{U}_{2оп}=U_{2оп}$.

d) Если $(i_*,j_*)\neq(i_0,j_0)$, $(i_*,j_*)\in U_{1оп}$ и $(i_*,j_*)\notin L_{i_0j_0}$, то $\bar{U}_{1оп}=(U_{1оп}\backslash(i_*,j_*))\cup(i_\times,j_\times)$, $\bar{U}_{2оп}=(U_{2оп}\backslash(i_\times,j_\times))\cup(i_0,j_0)$, где дуга $(i_\times,j_\times)\in U_{2оп}$ такова, что $(i_*,j_*)\in L_{i_\times j_\times}$.

На итерациях существенную роль играет матрица $D(U_{оп})$. В случае а) $D(\bar{U}_{оп})=D(U_{оп})$. В случае b) в $D(U_{оп})$ столбец, соответствующий циклу $L_{i_*j_*}$, заменяем на столбец, соответствующий циклу $L_{i_0j_0}$. В случае с), если дуга (i_*,j_*) не входит ни в один цикл, то матрица $D(U_{оп})$ не меняется, в противном случае в ней изменяются столбцы, соответствующие циклам, которые содержат дугу (i_*,j_*). И наконец, в случае d) заменяем столбец, соответствующий циклу $L_{i_\times j_\times}$ на столбец, соответствующий циклу $L_{i_0j_0}$, при этом изменяются столбцы, соответствующие циклам, содержащим дугу (i_*,j_*).

Построением новой опоры заканчивается итерация метода.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Габасов Р., Кириллова Ф.М.*** Методы линейного программирования. Ч. 1. – Мн., 1977.
2. ***Командина Л.В.*** Условная оптимизация потока / В кн.: ***Габасов Р., Кириллова Ф.М.*** Методы линейного программирования. Ч. 3. – Мн., 1980. – С. 158–169.
3. ***Дежурко Л.Ф.*** Дробно-линейная задача / В кн.: ***Габасов Р., Кириллова Ф.М.*** Методы линейного программирования. Ч. 3. – Мн., 1980. – С. 358–363.

S U M M A R Y

The transport problem of a special kind in network statement with fractional-linear objective function is considered. Taking into account specificity of a matrix of conditions and basic set, the direct basic algorithm of solving the task which is exact relaxing is under construction. The formula of an increment of objective function, the criterion of optimality are received.

Поступила в редакцию 21.01.2004