УДК 517.926.4

Т.Л. Сурин, С.В. Шерегов

Об угловой неправильности систем с функционально-коммутативными матрицами коэффициентов

Рассматриваем линейные системы

$$\dot{x} = A(t)x,\ x \in R^n,\ t \geq 0, \tag{1}$$

с кусочно-непрерывными, ограниченными на промежутке $[0,+\infty)$ матрицами $A(t)$ $(A(t) \in C^0_{[0,+\infty)})$. Будем обозначать через $\lambda[f]$ – показатель Ляпунова [1, 2] кусочно-непрерывной на $[0,+\infty)$ вектор-функции или матрицы $f(t)$, $\sigma(A)$ – коэффициент неправильности Д.М. Гробмана [2, с. 44; 3], $\lambda(A) \in R^n$ – вектор характеристических показателей $\lambda_1(A) \leq \lambda_2(A) \leq ... \leq \lambda_n(A)$ нормальной [1, с. 34] упорядоченной системы решений $X(t) = [x_1(t), x_2(t),..., x_n(t)]$ линейной системы (1) с показателями $\lambda_k = \lambda_k(A) = \lambda[x_k]$, $k = 1,...n$, ее столбцов, $\alpha_k(t) \in (0,\frac{\pi}{2}]$ угол между вектором $x_k(t)$ и линейным пространством остальных $n-1$ векторов $x_i(t) \in X(t)$. Величину $\sigma_0 = \sigma_0(A) = \max_k \{\lambda[\frac{1}{\alpha_k(t)}]\}$, следуя [4], будем называть угловой неправильностью системы (1).

Совместно с системой (1) рассматриваем возмущенную систему

$$\dot{y} = A(t)y + Q(t)y,\ y \in R^n,\ Q(t) \in C^0_{[0,+\infty)},\ t \geq 0. \tag{2}$$

Известно [3], что $\lambda(A+Q) = \lambda(A)$ для всякой $Q(t) \in C^0_{[0,+\infty)}$, удовлетворяющей условию $\lambda[Q] < -\sigma(A)$. В работе [4] показано, что совокупности $\lambda(A)$ и $\lambda(A+Q)$ характеристических показателей систем (1) и (2) совпадают при выполнении более слабого условия, а именно, в случае, если $\lambda[Q] \leq -\sigma(A) < -\sigma_0(A)$.

Рассмотрим частный случай системы (1), когда матрица $A(t)$ функционально-коммутативная, т.е. для всех $t_1, t_2 \in [0, +\infty)$ удовлетворяет условию $A(t_1)\ A(t_2) = A(t_2)\ A(t_1)$. Возникает задача нахождения угловой неправильности таких систем и выяснения вопроса, может ли угловая неправильность у таких систем быть положительной?

Справедлива следующая

Теорема. *Для систем с функционально-коммутативными матрицами коэффициентов* $\sigma_0(A) = 0$.

Доказательство. Известно [5], что систему (1) с помощью постоянного преобразования всегда можно привести к блочно-треугольному виду, причем диагональные элементы, принадлежащие одному и тому же блоку, будут между собой совпадать. Не ограничивая общности, будем считать систему (1) блочно-треугольной. Нормальная фундаментальная матрица такой системы может быть записана в виде $X(t) = exp\left(\int_0^t A(\tau)d\tau\right)$, элементы этой матрицы будем обозначать через $x_{ij}(t)$, $i,j=1,\dots,n$.

Вначале рассмотрим случай, когда матрица $A(t)$ состоит из одного блока, тогда $x_{ij}(t) \equiv 0$ при $i>j$, и $x_{ii}(t) \equiv x_{jj}(t)$ для любых $i,j = 1,\dots,n$. Обозначим через $\beta_k(t)$ угол между вектором $x_k(t)$ и подпространством векторов $x_1(t)$, $x_2(t),\dots, x_{k-1}(t)$, $(k = 2,3,\dots,n)$, через $X_k(t)$ левую верхнюю треугольную матрицу размерности $k\times k$, полученную из матрицы $X(t)$ вычеркиванием последних $n-k$ столбцов и строк. С помощью известной формулы вычисления определителей (см., например, п.5 [6]), получаем

$$|detX_k(t)| = \prod_1^k \|x_j(t)\| \prod_2^k \sin\beta_j(t).$$

Учитывая структуру матрицы $X(t)$, получаем

$$|detX_k(t)| = \left|\prod_1^k x_{jj}(t)\right| \text{ и } \|x_1\| = |x_{11}|, \text{ тогда } \sin\beta_i(t) = \frac{|x_{ii}|}{\|x_i\|},\ i=2,3,\dots,k. \qquad (3)$$

Найдем $\sin\alpha_k(t)$. Для этого рассмотрим матрицу $\bar{X}(t)$, полученную из матрицы $X(t)$ перестановкой столбцов таким образом, что $\bar{x}_i(t) = x_i(t)$ при $i \le k-1$, $\bar{x}_i(t) = x_{i+1}(t)$ при $i = k,\dots,n-1$, $\bar{x}_n(t) = x_k(t)$, $k=2,\dots,n-1$. Учитывая что при перестановке столбцов определитель не изменится, имеем

$$|det\, X(t)| = |det\, \bar{X}(t)| = \prod_1^n |x_{jj}(t)| =$$

$$= \prod_1^n \|x_j(t)\| \prod_2^{k-1} \sin\beta_j(t) \prod_{k+1}^n \sin\gamma_j(t) \sin\alpha_k(t),$$

где $\gamma_i(t)$ – угол между решением $x_i(t)$ и пространством решений $x_1(t)$, $x_2(t),\dots, x_{k-1}(t)$, $x_{k+1}(t),\dots, x_{i-1}(t)$, $i=k+1,\dots,n$. Тогда

$$\left|\prod_1^n x_{jj}(t)\right| = \prod_1^n \|x_j(t)\| \prod_2^{k-1} \frac{|x_{jj}|}{\|x_j\|} \prod_{k+1}^n \sin\gamma_j(t)\ \sin\alpha_k(t).$$

После сокращения получаем

$$\left|\prod_k^n x_{jj}(t)\right| = \prod_k^n \|x_j(t)\| \prod_{k+1}^n \sin\gamma_j(t)\ \sin\alpha_k(t) \qquad (4)$$

Очевидно, что $\sin\beta_i(t) \le \sin\gamma_i(t) \le \sin(x_1(t), x_i(t))$, $i = k+1, k+2,\dots,n$. Поскольку

$$\sin(x_1(t), x_i(t)) = \left(1 - \frac{(x_1; x_i)^2}{\|x_1\|^2 \|x_i\|^2}\right)^{1/2} = \frac{((x_{i_i})^2 + \dots + (x_{2_i})^2)^{1/2}}{\|x_i\|}, \text{ то}$$

$$\frac{|x_{ii}(t)|}{\|x_i\|} \le \sin \gamma_i(t) \le \frac{((x_{1i})^2+\ldots+(x_{2i})^2)^{1/2}}{\|x_i\|}. \qquad (5)$$

Из (4) получаем

$$\sin \alpha_k(t) = \frac{\prod_k^n |x_{jj}(t)|}{\prod_k^n \|x_j(t)\| \prod_{k+1}^n \sin \gamma_j(t)}. \qquad (6)$$

Учитывая (5), имеем

$$\frac{\prod_k^n |x_{jj}(t)| \prod_{k+1}^n \|x_j(t)\|}{\prod_k^n \|x_j(t)\| \prod_{j=k+1}^n (\sum_{i=2}^j x_{ij}^2)^{1/2}} \le \sin \alpha_k(t) \le \frac{\prod_k^n |x_{jj}(t)| \prod_{k+1}^n \|x_j(t)\|}{\prod_k^n \|x_j(t)\| \prod_{j=k+1}^n |x_{jj}(t)|}.$$

После сокращения получаем

$$\frac{\prod_k^n |x_{jj}(t)|}{\|x_k(t)\| \prod_k^n (\sum_{i=2}^j x_{ij}^2)^{1/2}} \le \sin \alpha_k(t) \le \frac{|x_{kk}|}{\|x_k\|},\ k \ne 1.$$

Рассмотрим отдельно случай k = 1. Обозначим через $\varphi_j(t)$ – угол между вектором $x_j(t)$ и подпространством векторов $x_2(t), \ldots, x_{j-1}(t)$. Тогда

$$|\det \overline{X}(t)| = \left|\prod_1^k x_{jj}(t)\right| = \prod_1^k \|x_j(t)\| \prod_2^k \sin \beta_j(t)\ \sin \alpha_1(t).$$

Для $\sin \varphi_j(t)$ получаем следующие оценки

$$\sin \beta_j(t) = \frac{|x_{jj}|}{\|x_j\|} \le \sin \varphi_j(t) \le \sin(x_2, x_j) = \frac{(\|x_j\|^2 \|x_2\|^2 - (x_{12}x_{1j} + x_{22}x_{2j})^2)^{1/2}}{\|x_j\| \|x_2\|}. \qquad (7)$$

Так как

$$\sin \alpha_1(t) = \frac{\prod_1^n |x_{jj}(t)|}{\prod_1^n \|x_j(t)\| \prod_3^n \sin \varphi_j(t)},$$

то учитывая оценки (7), имеем

$$\sin \alpha_1(t) \le \frac{\prod_1^n |x_{jj}(t)| \prod_2^n \|x_j(t)\| \|x_2(t)\|^{n-3}}{\prod_1^n \|x_j(t)\| \prod_{j=3}^n (\|x_j\|^2 \|x_2\|^2 - (x_{12}x_{1j} + x_{22}x_{2j})^2)^{1/2}}. \qquad (8)$$

Найдем угловую неправильность σ_0.

$$\sigma_0 = \sigma_0(A) = \max_k \{\lambda [\frac{1}{\alpha_k(t)}]\} \le \max_k \{\lambda [\frac{1}{\sin \alpha_k(t)}]\}.$$

$$\lambda\,[\frac{1}{\sin\alpha_k(t)}] \le \lambda\,[\frac{\|x_k(t)\| \prod\limits_{j=k+1}^{n} (\sum\limits_{i=2}^{j} x_{ij}^2)^{1/2}}{\prod\limits_{k}^{n} |x_{jj}(t)|}].$$

Учитывая структуру матрицы $X(t)$, получаем $\dfrac{\sum\limits_{i=2}^{j} x_{ij}^2}{|x_{jj}(t)|} \le M\,t^{j}$, следовательно, $\lambda\,[\dfrac{1}{\sin\alpha_k(t)}] \le 0$, $k \ne 1$. Аналогично, воспользовавшись оценкой (6), $\lambda\,[\dfrac{1}{\sin\alpha_1(t)}] = 0$. Отсюда следует, что $\sigma_0(A) = 0$ и теорема для случая одного блока доказана.

Рассмотрим общий случай матрицы $A(t)$. Предположим, что матрица $A(t)$ состоит из m блоков размерности n_i каждый, причем $\sum\limits_{i=1}^{m} n_i = n$. Обозначим $\sum\limits_{i=1}^{p} n_i = l_p$, $p=1,...,m$. Найдем $\sin\alpha_k(t)$, где $k \ne 1, l_1+1,...,l_{m-1}-1$. Поскольку $X(t)$ – блочно-диагональная матрица, причем каждый диагональный блок является треугольным, то рассуждая аналогично предыдущему случаю, получим, что $\sin\beta_k(t)$, $k=2,3,...,n$, вычисляется по формуле (3). Тогда для нахождения $\sin\alpha_k(t)$ справедлива формула (6). Воспользуемся тем, что

$$\sin\beta_i(t) \le \sin\gamma_i(t) \le \sin(x_{l_j+1}(t), x_i(t)),\ \text{если}\ l_j < i \le l_j-1,\ j=1,2,...,m.$$

Тогда

$$\frac{|x_{ii}(t)|}{\|x_i\|} \le \sin\gamma_i(t) \le \frac{((x_{l_j-1,i})^2+...+(x_{l_j-1,i})^2)^{1/2}}{\|x_i\|}$$

и оценка для $\sin\alpha_k(t)$ приобретает вид

$$\frac{\prod\limits_{k}^{n} |x_{jj}(t)|}{\|x_k(t)\| \prod\limits_{k}^{n} (\sum\limits_{i=l_j-1}^{j} x_{ij}^2)^{1/2}} \le \sin\alpha_k(t) \le \frac{|x_{kk}|}{\|x_k\|},\ k \ne 1, l_1-1,...,l_{m-1}+1.$$

Рассуждая аналогично как для случая одного блока, получаем

$$\lambda\,[\frac{1}{\sin\alpha_k(t)}] = 0,\ k \ne 1, l_1+1,...,l_{m-1}-1.$$

Если $k = 1, l_1-1,...,l_m-1$, то для $\sin\alpha_k(t)$ получаем оценки, аналогичные оценкам (8), с тем изменением, что вместо $\sin(x_2,x_i)$ будем рассматривать $\sin(x_p,x_i)$, где $p=2,l_1,...,l_m$.

Следствие. *Совокупности характеристических показателей систем (1) и (2) совпадают при выполнении условия* $\lambda[Q] \le -\sigma(A)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из работы [4] и доказанной теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Ляпунов А.М.*** Общая задача об устойчивости движения // Собр. соч.: В 6 т. – М.: Л., 1956. Т. 2. – С. 27.
2. ***Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В.*** Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. – М., 1966. – С. 17.
3. ***Гробман Д.М.*** Характеристические показатели систем, близких к линейным // Мат. сб., 1952. Т. 30, № 1. – С. 121–166.
4. ***Изобов Н.А., Степанович О.П.*** О свойствах коэффициента неправильности линейных систем // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26, № 11. – С. 1899–1906.
5. ***Чеботарев Г.Н.*** К решению в замкнутой форме краевой задачи Римана для систем n пар функций // Уч. зап. Казан. ун-та, 1956. 116, кн. 4. – С. 31–58.
6. ***Виноград Р.Э.*** Новое доказательство теоремы Перрона и некоторые свойства правильных систем // Успехи мат. наук, 1954. Т. 9. № 2. – С. 129–136.

SUMMARY

In this article a linear perturbed system of ordinary differential equations with functionally commutative matrix is considered. It is shown that the corner irregularity of such systems is equal to zero.