УДК 539.2

Н.С. Буйнов, В.С. Иванов

Спектр элементарных возбуждений в системе осцилляторного типа

Рассмотрим систему [1-3], состоящую из N частиц со спектром осцилляторного типа. Пусть гамильтониан системы частиц, без учета взаимодействия их с возбуждающим бозонным полем, имеет вид:

$$H_0 = \sum_{j=1}^{N} \hbar\omega_0 b_j^{+} b_j , \qquad (1)$$

где $\hbar\omega_0$ – энергия возбуждения отдельной квантовой частицы, b_j^{+}, b_j – операторы Бозе. Гамильтониан бозонного поля, воздействующего на систему невзаимодействующих между собой квантовых гармонических осцилляторов:

$$H_1 = \hbar\omega_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^{+} a_{\vec{k}} . \qquad (2)$$

Здесь учитывается одна резонансная бозонная мода, $a_{\vec{k}}^{+}$, $a_{\vec{k}}$ – операторы рождения и уничтожения. В качестве такой бозонной моды может быть выбрана или электромагнитная мода излучения в резонаторе с частотой $\omega_{\vec{k}} \approx \omega_0$, или одна из колебательных мод кристаллического твердого тела. Гамильтониан взаимодействия

$$H_2 = \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\lambda_2}{\sqrt{N}} \left(b_j^{+}\right)^2 a_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{r}_j} + \frac{\lambda_2^{*}}{\sqrt{N}} \left(b_j\right)^2 a_{\vec{k}}^{+} e^{-i\vec{k}\vec{r}_j} \right), \qquad (3)$$

где λ_2 – константа взаимодействия.

Тогда полный гамильтониан системы, взаимодействующей с бозонным полем:

$$H = H_0 + H_1 + H_2 ,$$

примет вид:

$$H = \hbar\omega_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^{+} a_{\vec{k}} + \sum_{j=1}^{N} \hbar\omega_0 b_j^{+} b_j + \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\lambda_2}{\sqrt{N}} \left(b_j^{+}\right)^2 a_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{r}_j} + \frac{\lambda_2^{*}}{\sqrt{N}} \left(b_j\right)^2 a_{\vec{k}}^{+} e^{-i\vec{k}\vec{r}_j} \right). \qquad (4)$$

Исследовать данный гамильтониан будем с помощью метода функций Грина. В качестве исходной функции Грина возьмем функцию $G(t) = \left\langle\left\langle a_{\vec{k}}(t) \middle| a_{\vec{k}}^{+} \right\rangle\right\rangle$. Она удовлетворяет следующему уравнению:

$$i\hbar \frac{dG(t)}{dt} = \delta(t) \left\langle \left[a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}}^{+} \right] \right\rangle - \left\langle\left\langle \left[a_{\vec{k}}, H \right](t) \middle| a_{\vec{k}}^{+} \right\rangle\right\rangle . \qquad (5)$$

После преобразований уравнение (5) примет вид:

$$i\hbar \frac{dG(t)}{dt} = \delta(t) + \hbar\omega_{\vec{k}} G(t) + \frac{\lambda_2^{*}}{\sqrt{N}} \left\langle\left\langle \left(\sum_{j=1}^{N} \left(b_j\right)^2 e^{-i\vec{k}\vec{r}_j} \right)(t) \middle| a_{\vec{k}}^{+} \right\rangle\right\rangle . \qquad (6)$$

Введем новую функцию Грина $F(t) = \left\langle\left\langle \left(\sum_{j=1}^{N} \left(b_j\right)^2 e^{-i\vec{k}\vec{r}_j} \right)(t) \middle| a_{\vec{k}}^{+} \right\rangle\right\rangle$. Тогда из (6) получаем: $i\hbar \dfrac{dG(t)}{dt} = \delta(t) + \hbar\omega_{\bar{k}} G(t) + \dfrac{\lambda_2^*}{\sqrt{N}} F(t)$. (7)

Функция $F(t)$ должна удовлетворять уравнению:

$$i\hbar \frac{dF(t)}{dt} = \left\langle\left\langle \left[\sum_{j=1}^{N} (b_j)^2 e^{-i\bar{k}\bar{r}_j}, H \right](t) \middle| a_{\bar{k}}^{+} \right\rangle\right\rangle \tag{8}$$

Преобразуем правую часть уравнения (8) и получим:

$$i\hbar \frac{dF(t)}{dt} = = 2\hbar\omega_0 \left\langle\left\langle \left(\sum_{j=1}^{N} (b_j)^2 e^{-i\bar{k}\bar{r}_j} \right)(t) \middle| a_{\bar{k}}^{+} \right\rangle\right\rangle + \frac{2\lambda_2}{\sqrt{N}} \left\langle\left\langle \left(\sum_{j=1}^{N} (2b_j^{+} b_j + 1) a_{\bar{k}} \right)(t) \middle| a_{\bar{k}}^{+} \right\rangle\right\rangle. \tag{9}$$

В это выражение подставим $\left\langle\left\langle \left(\sum_{j=1}^{N} (b_j)^2 e^{-i\bar{k}\bar{r}_j} \right)(t) \middle| a_{\bar{k}}^{+} \right\rangle\right\rangle = F(t)$ и выполним следующее расцепление:

$$\left\langle\left\langle \left(\sum_{j=1}^{N} (2b_j^{+} b_j + 1) a_{\bar{k}} \right)(t) \middle| a_{\bar{k}}^{+} \right\rangle\right\rangle \to \left\langle \sum_{j=1}^{N} (2b_j^{+} b_j + 1) \right\rangle \left\langle\left\langle a_{\bar{k}}(t) \middle| a_{\bar{k}}^{+} \right\rangle\right\rangle =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \left\langle 2b_j^{+} b_j + 1 \right\rangle \left\langle\left\langle a_{\bar{k}}(t) \middle| a_{\bar{k}}^{+} \right\rangle\right\rangle = N \left\langle 2b^{+} b + 1 \right\rangle \left\langle\left\langle a_{\bar{k}}(t) \middle| a_{\bar{k}}^{+} \right\rangle\right\rangle.$$

Тогда уравнение (9) приводится к виду:

$$i\hbar \frac{dF(t)}{dt} = 2\hbar\omega_0 F(t) + 2\lambda_2 \sqrt{N} \left\langle 2b^{+} b + 1 \right\rangle G(t). \tag{10}$$

Тогда получим систему:

$$\begin{cases} i\hbar \dfrac{dG(t)}{dt} = \delta(t) + \hbar\omega_{\bar{k}} G(t) + \dfrac{\lambda_2^*}{\sqrt{N}} F(t), \\ i\hbar \dfrac{dF(t)}{dt} = 2\hbar\omega_0 F(t) + 2\lambda_2 \sqrt{N} \left\langle 2b^{+} b + 1 \right\rangle G(t). \end{cases} \tag{A}$$

Произведем фурье-преобразования функций $G(t)$, $F(t)$. При этом система (A) перейдет в следующую систему для фурье-образов $G(\omega)$, $F(\omega)$:

$$\begin{cases} i\hbar(-i\omega G(\omega)) = 1 + \hbar\omega_{\bar{k}} G(\omega) + \dfrac{\lambda_2^*}{\sqrt{N}} F(\omega), \\ i\hbar(-i\omega F(\omega)) = 2\hbar\omega_0 F(\omega) + 2\lambda_2 \sqrt{N} \left\langle 2b^{+} b + 1 \right\rangle G(\omega), \end{cases} \tag{11}$$

где учтено, что фурье-образом функции $\delta(t)$ является число 1.

Запишем (A) в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} \hbar(\omega - \omega_{\bar{k}}) & -\dfrac{\lambda_2^*}{\sqrt{N}} \\ -2\lambda_2 \sqrt{N} \left\langle 2b^{+} b + 1 \right\rangle & \hbar(\omega - 2\omega_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G(\omega) \\ F(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Откуда найдем:

$$\begin{pmatrix} G(\omega) \\ F(\omega) \end{pmatrix} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} \hbar(\omega - 2\omega_0) & \dfrac{\lambda_2^*}{\sqrt{N}} \\ 2\lambda_2 \sqrt{N} \left\langle 2b^{+} b + 1 \right\rangle & \hbar(\omega - \omega_{\bar{k}}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} G(\omega) \\ F(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\hbar(\omega - 2\omega_0)}{D} \\ \dfrac{2\lambda_2\sqrt{N}\left\langle 2b^+b - 1\right\rangle}{D} \end{pmatrix}, \tag{Б}$$

где определитель

$$D = \begin{vmatrix} \hbar(\omega - \omega_k) & -\dfrac{\lambda_2^*}{\sqrt{N}} \\ -2\lambda_2\sqrt{N}\left\langle 2b^+b - 1\right\rangle & \hbar(\omega - 2\omega_0) \end{vmatrix} = \hbar^2(\omega - \omega_k)(\omega - 2\omega_0) - 2|\lambda_2|^2\left\langle 2b^+b - 1\right\rangle.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} G(\omega) = \dfrac{\hbar(\omega - 2\omega_0)}{\hbar^2(\omega - \omega_k)(\omega - 2\omega_0) - 2|\lambda_2|^2\left\langle 2b^+b + 1\right\rangle} \\ F(\omega) = \dfrac{2\lambda_2\sqrt{N}\left\langle 2b^+b - 1\right\rangle}{\hbar^2(\omega - \omega_k)(\omega - 2\omega_0) - 2|\lambda_2|^2\left\langle 2b^+b - 1\right\rangle} \end{cases}. \tag{В}$$

Из системы (В) видно, что полюсы функций Грина $G(\omega)$, $F(\omega)$ находятся из условия: $\hbar^2(\omega - \omega_k)(\omega - 2\omega_0) - 2|\lambda_2|^2\left\langle 2b^+b + 1\right\rangle = 0$. (12)

Решим данное уравнение относительно ω:

$$\omega_{1,2} = \frac{\omega_k + 2\omega_0}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{\omega_k - 2\omega_0}{2}\right)^2 - 2\omega_k\omega_0 + \frac{2|\lambda_2|^2\left\langle 2b^+b - 1\right\rangle}{\hbar^2}}. \tag{13}$$

Так как в полученной формуле величина $\left\langle 2b^+b + 1\right\rangle$ зависит от температуры T резонаторной полости, то и обе моды (мягкая и жесткая) также зависят от температуры: $\omega_{1,2} = \omega_{1,2}(T)$. Рассмотрим отдельно мягкую моду:

$$\omega_1 = \frac{\omega_k - 2\omega_0}{2} - \sqrt{\left(\frac{\omega_k - 2\omega_0}{2}\right)^2 - 2\omega_k\omega_0 + \frac{2|\lambda_2|^2\left\langle 2b^+b - 1\right\rangle}{\hbar^2}}. \tag{14}$$

Найдем температуру фазового перехода T_{KP}, для которой $\omega_1(T_{KP}) = 0$. Из (14) следует, что для температуры $T = T_{KP}$ должно выполняться:

$$\frac{|\lambda_2|^2\left\langle 2b^+b + 1\right\rangle}{\hbar^2} = \omega_k\omega_0. \tag{15}$$

Таким образом, в нашей системе возможен фазовый переход при температуре T_{KP}, определяемой из термодинамического равенства (15).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Файн В.М.** Квантовая радиофизика. Фотоны и нелинейные среды. – М., 1972. Т. 1. – 473 с.
2. **Давыдов А.С.** Теория твердого тела. – М., 1976. – 640 с.
3. **Маделунг О.** Теория твердого тела. – М., 1980. – 416 с.

S U M M A R Y

The research of influence of a bozon field on oscillation type system has been carried out.

Поступила в редакцию 28.04.2004