УДК 517.956

С.А. Прохожий

Об однозначной разрешимости задачи Коши для уравнения фильтрации с конвекцией и поглощением

1. Введение. Рассматривается уравнение

$$u_t=a(u^m)_{xx}+b(u^n)_x-cu^p, \qquad (1)$$

где $m \geq n \geq 1 > p > 0$, a, b, c – положительные постоянные. Уравнение (1) возникает как модельное для большого числа физических явлений. Например, оно описывает фильтрацию жидкости через однородную пористую среду, диффузию газа и процессы распространения тепла в нелинейной среде. Присутствие первого слагаемого в правой части (1) означает наличие в среде диффузии, второго слагаемого – конвективного переноса, третьего – поглощения. В полуплоскости $S = \mathbf{R} \times [0,+\infty)$ переменных (x,t) изучается задача Коши с начальным условием

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbf{R}. \tag{2}$$

Здесь $u_0(x)$ – неотрицательная непрерывная функция, которая может расти на бесконечности.

Как известно, вследствие вырождения уравнения (1) при $u = 0$ задача (1), (2) может не иметь классического решения. Определяя понятие обобщенного решения задачи (1), (2), будем следовать работам [1–2].

Определение 1. *Неотрицательную непрерывную в* S *функцию* $u(x,t)$ *назовем обобщенным субрешением уравнения (1) в* S, *если выполнено интегральное неравенство*

$$\iint_P [uf_t + au^m f_{xx} - bu^n f_x - cu^p f]dxdt - \int_{x_1}^{x_2} ufdx\Big|_{t_1}^{t_2} - a\int_{t_1}^{t_2} u^m f_x dt\Big|_{x_1}^{x_2} \geq 0 \tag{3}$$

для всех ограниченных прямоугольников $P = [x_1, x_2] \times [t_1, t_2] \subset S$ *и любой неотрицательной функции* $f \in C^{2,1}_{x,t}(P)$ *такой, что* $f(x_1, t) = f(x_2, t) = 0$ *при* $t \in [t_1, t_2]$.

Определение 2. *Функцию* $u(x,t)$ *назовем обобщенным суперрешением уравнения (1) в* S, *если выполнено определение 1 с неравенством противоположного знака в (3).*

Определение 3. *Функцию* $u(x,t)$ *назовем обобщенным решением уравнения (1) в* S, *если она является обобщенным суб- и суперрешением уравнения (1) в* S. *Если при этом выполняется условие (2), то* $u(x,t)$ *назовем обобщенным решением задачи Коши (1), (2).*

Аналогично вводятся понятия обобщенного решения, обобщенного суб- и суперрешения уравнения (1) в полосе $S_T = \mathbf{R} \times [0,T)$.

В настоящей работе приводится ряд теорем существования и единственности растущих на бесконечности обобщенных решений задачи (1), (2). Классы существования и единственности обобщенного решения задачи Коши для уравнения (1) с $c = 0$ изучены в [3], а с $b = 0$ – в [4].

При помощи интегрирования по частям легко доказывается следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть* $v(x,t)$ *– непрерывная неотрицательная функция, удовлетворяющая в* S_T *неравенству*

$$-v_t + a(v^m)_{xx} + b(v^n)_x - cv^p \leq 0 \quad (\geq 0) \tag{4}$$

и принадлежащая пространству $C^{2,1}_{x,t}(S_T)$ *вне конечного числа непрерывных кривых вида* $x = \zeta(t)$, *причем* $(v^m)_x(x,t)$ *непрерывна при* $x = \zeta(t)$. *Тогда* $v(x,t)$ *является обобщенным суперрешением (субрешением) уравнения (1).*

Для доказательства основных результатов будет применяться следующий принцип сравнения.

Теорема 1. *Пусть* $\varphi(x,t)$ *– произвольное обобщенное суперрешение уравнения (1) в* S_T *и* $u_0(x) \leq \varphi(x,0)$. *Тогда в* S_T *существует минимальное обобщенное решение* $u(x,t)$ *задачи Коши (1), (2) такое, что*

$$u(x,t) \le \varphi(x,t) \qquad \text{в } S_T. \tag{5}$$

Доказательство. При доказательстве будем следовать работам [5, 6]. Для $s = 1,2,\ldots$ рассмотрим последовательность неотрицательных гладких функций $u_{0s}(x)$, обращающихся в ноль при $|x| \ge s$ и аппроксимирующих $u_0(x)$ снизу: $u_{0s}(x) \le u_{0(s+1)}(x) \le u_0(x)$ для всех $x \in \mathbf{R}$, $u_{0s}(x) \to u_0(x)$ при $s \to \infty$ равномерно на любом компактном подмножестве $\mathbf{R}$. Обозначим через $u_s(x,t)$ обобщенное решение уравнения (1) в прямоугольнике $Q_{s,T} = [-s,s] \times [0,T)$ с условиями

$$u_s(x,0) = u_{0s}(x), \quad x \in [-s,s], \qquad u_s(\pm s,t) = 0, \quad t \in [0,T).$$

По теореме сравнения (см. [1]) $0 \le u_s(x,t) \le u_{s-1}(x,t) \le \varphi(x,t)$ в $Q_{s,T}$. Следовательно, для всех $(x,t) \in S_T$ мы можем определить функцию

$$u(x,t) = \lim_{s \to \infty} u_s(x,t). \tag{6}$$

Функция $u(x,t)$ неотрицательна, удовлетворяет интегральному тождеству (3) из определения обобщенного решения и неравенству $u(x,t) \le \varphi(x,t)$. Более того, в силу выбора начальных функций $u_{0s}(x)$ для $u(x,t)$ выполнено условие (2). Чтобы показать, что $u(x,t)$ действительно есть обобщенное решение задачи (1), (2), осталось установить ее непрерывность в S_T. Это можно сделать, например, также, как в [1–2], где рассматривались более общие, чем (1), уравнения. Наконец, пусть $g(x,t)$ – любое другое обобщенное решение задачи (1), (2). По теореме сравнения $u_s(x,t) \le g(x,t)$ в $Q_{s,T}$, и, следовательно, $u(x,t) \le g(x,t)$ в S_T. Это доказывает минимальность обобщенного решения $u(x,t)$ задачи (1), (2).

2. Случай $n < (m+1)/2$. Определим класс $\mathbf{K}_1$ неотрицательных функций $v(x,t)$, для которых в полосе S_T выполнено неравенство

$$v(x,t) \le M_1(\alpha_1 - x^2)^{1/(m-1)}. \tag{7}$$

Здесь и далее через M_i и α_i условимся обозначать соответственно положительные и неотрицательные постоянные. Постоянные M_1 и α_1 в (7) могут зависеть от T и функции $v(x,t)$.

Теорема 2. *Пусть* $u_0(x)$ *удовлетворяет неравенству*

$$u_0(x) \le M_2(\alpha_2 + x^2)^h, \quad h \ge 0. \tag{8}$$

Тогда, если $h < 1/(m-1)$, *то задача (1), (2) имеет обобщенное решение* $u(x,t) \in \mathbf{K}_1$ *в* S. *При* $h = 1/(m-1)$ *задача (1), (2) разрешима в некоторой полосе* S_T *и* $u(x,t) \in \mathbf{K}_1$.

Доказательство. Пусть T – произвольное положительное число и $h < 1/(m-1)$. Тогда несложно показать, что функция $\varphi(x,t) = M_2(M_3 + x^2)^h \exp t$ при достаточно большом значении $M_3 = M_3(M_2, \alpha_2, T, m, n, p, a, b, c)$ является обобщенным суперрешением уравнения (1), причем

$$u_0(x) \le \varphi(x,t). \tag{9}$$

По теореме 1 отсюда следует, что в полосе S_T существует обобщенное решение $u(x,t)$ задачи (1), (2), принадлежащее классу $\mathbf{K}_1$. Так как функция

$\varphi(x,t)$ определена во всей полуплоскости S, то, продолжая $u(x,t)$ стандартным образом на отрезки $[iT,(i+1)T]$ $(i=1,2,\dots)$, делаем вывод о глобальной разрешимости задачи Коши. Если (8) выполнено с $h=1/(m-1)$, то при достаточно малом значении $T>0$ обобщенным суперрешением уравнения (1) в S_T, удовлетворяющим неравенству (9), является

$$\varphi(x,t)=M_2[(1-M_4t)^{-1}(\alpha_2+x^2)]^{1/(m-1)}. \tag{10}$$

Теорема 2 доказана.

Рассуждая так же, как в [3], можно показать, что при $h=1/(m-1)$ в (8) не существует обобщенного решения задачи (1), (2) во всей полуплоскости S, а при $h>1/(m-1)$ решение не существует ни в какой полосе S_T. Это свидетельствует об определенной точности теоремы 2.

Замечание 1. Обобщенное решение задачи Коши (1), (2) можно построить также следующим образом. Пусть ε – произвольное положительное число. Рассмотрим вспомогательную задачу Коши для уравнения

$$u_t=a(u^m)_{xx}+b(u^n)_x-cu^p+c\varepsilon^p \tag{11}$$

с начальной функцией

$$u_{0\varepsilon}(x)=u_0(x)+\varepsilon. \tag{12}$$

Из неотрицательности функции $u_0(x)$ вытекает неравенство

$$u_{0\varepsilon}(x)\ge\varepsilon. \tag{13}$$

Пусть $\phi(x,t)$ – суперрешение уравнения (11), удовлетворяющее условию $\phi(x,t)\ge\varepsilon$ для всех $(x,t)\in S_T$. Рассмотрим последовательность непрерывных на отрезке $[-s,s]$ функций $u_{0\varepsilon s}(x)$, для которых выполнены соотношения

$$\varepsilon\le u_{0\varepsilon(s+1)}(x)\le u_{0\varepsilon s}(x)\le\phi(x,0),\quad x\in[-s,s],$$

$$u_{0\varepsilon s}(\pm s)=\phi(\pm s,0),\qquad u_{0\varepsilon s}(x)\to u_{0\varepsilon}(x) \text{ при } s\to\infty$$

равномерно на любом компактном подмножестве $\mathbf{R}$. В прямоугольнике $Q_{s,T}$ рассмотрим первую краевую задачу для уравнения (11) с условиями

$$u(x,0)=u_{0\varepsilon s}(x) \text{ при } x\in[-s,s],\qquad u(\pm s,t)=\phi(\pm s,t) \text{ при } t\in[0,T). \tag{14}$$

Очевидно, функция $u(x,t)=\varepsilon$ является решением уравнения (11). По теореме сравнения для решений $u_{\varepsilon s}(x,t)$ задачи (11), (14) в любом ограниченном подмножестве S_T выполнены неравенства

$$\varepsilon\le u_{\varepsilon(s+1)}(x,t)\le u_{\varepsilon s}(x,t)\le\phi(x,t).$$

Тогда решение $u_\varepsilon(x,t)$ задачи (11), (12) можно определить формулой

$$u_\varepsilon(x,t)=\lim_{s\to\infty}u_{\varepsilon s}(x,t). \tag{15}$$

Очевидно,

$$\varepsilon\le u_\varepsilon(x,t)\le\phi(x,t). \tag{16}$$

При выполнении для $u_0(x)$ условий теоремы 2 неравенство (8) для функции $u_{0\varepsilon}(x)$ также справедливо с $M_2+\delta$ вместо M_2 и достаточно большом α_2, где значение $\delta>0$ может быть выбрано как угодно мало. Аналогично теореме 2 можно доказать, что решение $u_\varepsilon(x,t)$ задачи (11), (12) принадлежит классу $\mathbf{K}_1$. Применяя рассуждения, аналогичные приведенным в [4], можно показать, что

$$u(x,t)=\lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon(x,t) \qquad (17)$$

является обобщенным решением задачи Коши (1), (2).

Теорема 3. *Обобщенное решение задачи Коши (1), (2) единственно в произвольной полосе* S_T *в классе функций* $\mathbf{K}_1$.

Доказательство. При доказательстве будем использовать работы [1, 3, 6]. Введем обозначение $s_+=\max\{s,0\}$. Пусть $u_\varepsilon(x,t)$ – решение задачи (11), (12), принадлежащее классу $\mathbf{K}_1$, а $\bar u(x,t)$ – обобщенное решение уравнения (1) в S_T из класса $\mathbf{K}_1$ с начальным условием $\bar u_0(x)$. Полагая $x_1=-r$, $x_2=r$, $t_1=0$, $t_2=\tau$ $(0<\tau\le T)$,

$$A(x,t)=\begin{cases} a\dfrac{u_\varepsilon^m(x,t)-\bar u^m(x,t)}{u_\varepsilon(x,t)-\bar u(x,t)} & \text{при} \quad u_\varepsilon\ne\bar u, \\ amu_\varepsilon^{m-1}(x,t) & \text{при} \quad u_\varepsilon=\bar u, \end{cases}$$

$$B(x,t)=\begin{cases} b\dfrac{u_\varepsilon^n(x,t)-\bar u^n(x,t)}{u_\varepsilon(x,t)-\bar u(x,t)} & \text{при} \quad u_\varepsilon\ne\bar u, \\ bnu_\varepsilon^{n-1}(x,t) & \text{при} \quad u_\varepsilon=\bar u, \end{cases}$$

$$C(x,t)=\begin{cases} c\dfrac{u_\varepsilon^p(x,t)-\bar u^p(x,t)}{u_\varepsilon(x,t)-\bar u(x,t)} & \text{при} \quad u_\varepsilon\ne\bar u, \\ cpu_\varepsilon^{p-1}(x,t) & \text{при} \quad u_\varepsilon=\bar u, \end{cases} \qquad (18)$$

из определения обобщенного решения получаем

$$\iint_{Q_{r,\tau}}(u_\varepsilon-\bar u)(f_t+Af_{xx}-Bf_x-Cf)dxdt+c\varepsilon^p\iint_{Q_{r,\tau}}fdxdt-a\int_0^\tau(u_\varepsilon^m-\bar u^m)f_x dt\Big|_{-r}^{r}+$$
$$-\int_{-r}^{r}[u_{0\varepsilon}(x)-\bar u_0(x)]f(x,0)dx\ge\int_{-r}^{r}[u_\varepsilon(x,\tau)-\bar u(x,\tau)]f(x,\tau)dx. \qquad (19)$$

Из (7), (10), (16), (18) заключаем, что в S_τ справедливы неравенства

$$am\varepsilon^{m-1}\le A(x,t)\le M_5(\alpha_3+x^2),$$
$$bn\varepsilon^{n-1}\le B(x,t)\le M_6(\alpha_4+x^2)^{(n-1)/(m-1)},$$
$$M_7(\alpha_5+x^2)^{-(1-p)/(m-1)}\le C(x,t)\le cp\varepsilon^{-(1-p)}.$$

Пусть ε_1 и r_0 – произвольные положительные числа, $\omega(x)\in C_0^\infty(\mathbf{R})$ – произвольная функция такая, что $0\le\omega(x)\le 1$ и $\omega(x)=0$ при $|x|\ge r_0$, $A_s(x,t)$, $B_s(x,t)$ и $C_s(x,t)$ $(s=1,2,\dots)$ – последовательности положительных функций из пространства $C^\infty(\bar S_\tau)$, равномерно сходящихся при $s\to\infty$ на любом ограниченном множестве соответственно к функциям $A(x,t)$, $B(x,t)$, $C(x,t)$ и удовлетворяющих в S_τ неравенствам

$$am\varepsilon^{m-1}\le A_s(x,t)\le M_8(\alpha_6+x^2),$$
$$bn\varepsilon^{n-1}\le B_s(x,t)\le M_9(\alpha_6+x^2)^{(n-1)/(m-1)},$$
$$M_{10}(\alpha_6+x^2)^{-(1-p)/(m-1)}\le C_s(x,t)\le cp\varepsilon^{-(1-p)}. \qquad (20)$$

Постоянные M_i и α_i в (20) не зависят от r и s.

При $r>r_0+1$ в $Q_{r,\tau}$ существует единственное классическое решение $f_{rs}(x,t)$ задачи

$$L_s f \equiv f_t - A_s(x,t)f_{xx} - B_s(x,t)f_x - C_s(x,t)f = 0, \quad (21)$$

$$f(x,\tau) = \omega(x), \qquad f(x,t)\big|_{S_{r,\tau}} = 0, \quad (22)$$

где $S_{r,\tau} = \{(x,t) \in R^2 : |x| = r, 0 \le t \le \tau\}$. По принципу максимума в $Q_{r,\tau}$

$$0 \le f_{rs}(x,t) \le \max_{|x| \le r} \omega(x) \le 1. \quad (23)$$

Для того, чтобы получить более точную оценку функции $f_{rs}(x,t)$ в $Q_{r,\tau}$, сравним ее со вспомогательной функцией

$$z(x,t) = M_{11} \exp[d(\tau - t)](\alpha_6 + x^2)^{-\gamma}, \quad (24)$$

где положительные постоянные d и γ будут выбраны ниже. Вследствие (22)–(24) $z \ge f_{rs}$ для значений $t = \tau$, $x = -r$, $x = r$ при достаточно большом значении M_{11}. Используя (20), (21), (24), имеем

$$L_s z \le -dz + 2\gamma(2\gamma + 1)A_s(\alpha_6 + x^2)^{-1}z - 2\gamma B_s(\alpha_6 + x^2)^{-1/2}z \le 0$$

при достаточно большом значении d. По теореме сравнения отсюда следует неравенство

$$f_{rs}(x,t) \le z(x). \quad (25)$$

Для оценки производных $\partial f_{rs}/\partial x$ при $|x| = r$ $(r > r_0 + 1)$ рассмотрим в $Q_{r,r-1,\tau} = Q_{r,\tau} \cap \{x \in R : |x| \ge r-1\}$ функцию $j(x) = -d_1 \exp(|x|^\alpha) + d_2$, где $\alpha > 1 + 2(n-1)/(m-1)$, а положительные постоянные d_1 и d_2 определяются из системы

$$\begin{cases} -d_1 \exp[(r-1)^\alpha] + d_2 = M_{11}\exp(d\tau)[\alpha_6 + (r-1)^2]^{-\gamma}, \\ -d_1 \exp(r^\alpha) + d_2 = 0. \end{cases} \quad (26)$$

Очевидно, $L_s j \le 0$ в $Q_{r,r-1,\tau}$ при достаточно больших значениях r. Вследствие (24)–(26)

$f_{rs}(x,t) \le j(x)$ для $|x| = r-1$, $0 \le t \le \tau$,

$0 = f_{rs}(x,\tau) \le j(x)$ для $r-1 \le |x| \le r$, $t = \tau$,

$0 = f_{rs}(x,t) = j(x)$ для $|x| = r$, $0 \le t \le \tau$.

Отсюда по теореме сравнения $f_{rs}(x,t) \le j(x)$ в $Q_{r,r-1,\tau}$ и, следовательно,

$$\sup_{|x|=r, 0\le t\le\tau} \left|\frac{\partial f_{rs}}{\partial x}\right| \le \sup_{|x|=r} \left|\frac{\partial j}{\partial x}\right| \le M_{12}(\alpha_6 + r^2)^{-\gamma-(\alpha-1)/2}. \quad (27)$$

Из (21), (27) и предположений о функциях $\omega(x)$, $A_s(x,t)$, $B_s(x,t)$, $C_s(x,t)$ вытекает следующая оценка с независящей от s постоянной.

$$\left|\frac{\partial f_{rs}}{\partial x}\right| \le M_{13}, \quad (x,t) \in Q_{r,\tau}. \quad (28)$$

Полагая в (19) $f = f_{rs}$ и используя (21), (22), находим

$$\int_{-r}^{r} [u_\varepsilon(x,\tau) - \bar{u}(x,\tau)]_+ \omega(x)dx \le \int_{-r}^{r} [u_{0\varepsilon}(x) - \bar{u}_0(x)]_+ dx - a\int_0^\tau (u_\varepsilon^m - \bar{u}^m)f_x dt\Big|_{-r}^{r} +$$

$$+ \iint_{Q_{r,\tau}} (u_\varepsilon - \bar{u})[(A - A_s)f_{xx} - (B - B_s)f_x - (C - C_s)f]dxdt + c\varepsilon^p \iint_{Q_{r,\tau}} f dxdt. \quad (29)$$

Для упрощения записи в (29) и в дальнейшем индексы у функции $f_{rs}(x,t)$ не указываются. Обозначим интегралы в правой части (29) соответственно через I_i $(i=1,2,3)$. Оценим по модулю I_2 и I_3. Из (7), (10), (16), (27) следует, что

$$|I_2| < \varepsilon_1 \tag{30}$$

при достаточно больших значениях γ и r. Зафиксируем выбранное значение r. Для оценки I_3 умножим уравнение (21) на f_{xx} и проинтегрируем полученное равенство по $Q_{r,\tau}$:

$$\iint_{Q_{r,\tau}} A_s f_{xx}^2 dxdt = \frac{1}{2}\int_{-r}^{r}[w'(x)]^2 - \frac{1}{2}\int_{-r}^{r} f_x^2(x,0) + \iint_{Q_{r,\tau}} B_s f_x f_{xx} dxdt - cp\varepsilon^{-(1-p)}\iint_{Q_{r,\tau}} C_s f_x^2 dxdt \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_{-r}^{r}[w'(x)]^2 + \frac{d_r}{2}\iint_{Q_{r,\tau}} B_s f_{xx}^2 dxdt + \frac{1}{2d_r}\iint_{Q_{r,\tau}} B_s f_x^2 dxdt, \tag{31}$$

где $d_r = am\varepsilon^{(m-1)} M_9^{-1}(\alpha_6 + r^2)^{-(n-1)/(m-1)}$. На основании (20), (28), (31) заключаем, что

$$\iint_{Q_{r,\tau}} A_s f_{xx}^2 dxdt \leq M_{14}. \tag{32}$$

В (32) постоянная M_{14} может зависеть от r и τ, но не зависит от s. Применяя неравенство Коши-Буняковского и соотношения (7), (16), (20), (28), (32), получаем:

$$|I_3| \leq \left\{\iint_{Q_{r,\tau}} (u_\varepsilon - \bar{u})^2 (A - A_s)^2 A_s^{-1} dxdt\right\}^{1/2} \left\{\iint_{Q_{r,\tau}} A_s f_{xx}^2 dxdt\right\}^{1/2} +$$

$$+ \sup_{Q_{r,\tau}} |B - B_s| \iint_{Q_{r,\tau}} |u_\varepsilon - \bar{u}||f_x| dxdt + \sup_{Q_{r,\tau}} |C - C_s| \iint_{Q_{r,\tau}} |u_\varepsilon - \bar{u}| f dxdt \leq \varepsilon_1 \tag{33}$$

при фиксированных значениях r, τ и достаточно большом s. Из (23), (29), (30), (33) в силу произвольности ε_1 и $\omega(x)$ следует неравенство

$$\int_{-r_0}^{r_0} [u_\varepsilon(x,\tau) - \bar{u}(x,\tau)]_+ dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} [u_{0\varepsilon}(x) - \bar{u}_0(x)]_- dx + 2cr\tau\varepsilon^p. \tag{34}$$

Переходя в (34) к пределу при $\varepsilon \to 0$, используя (12), (17), в силу произвольности r_0 и независимости выбора r от ε, приходим к неравенству

$$\int_{-\infty}^{\infty} [u(x,\tau) - \bar{u}(x,\tau)]_- dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} [u_0(x) - \bar{u}_0(x)]_- dx \quad \text{при } 0 < \tau \leq T. \tag{35}$$

Повторяя теперь рассуждения теоремы с $(\bar{u} - u_\varepsilon)_+$ вместо $(u_\varepsilon - \bar{u})_+$, выводим неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\bar{u}(x,\tau) - u(x,\tau)]_+ dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} [\bar{u}_0(x) - u_0(x)]_+ dx \quad \text{при } 0 < \tau \leq T. \tag{36}$$

Из (35) и (36) вытекает неравенство

$$\|u(x,\tau) - \bar{u}(x,\tau)\|_{L^1(R)} \leq \|u_0(x) - \bar{u}_0(x)\|_{L^1(R)},$$

из которого и следует справедливость теоремы. Теорема 3 доказана.

Аналогично пункту 2 доказываются теоремы существования и единственности для других соотношений показателей степеней.

3. Случай $n = (m+1)/2$. Несложно проверить, что уравнение (1) имеет семейство стационарных классических решений $u_{st}(x)$, удовлетворяющих обыкновенному дифференциальному уравнению

$$a(u_{st}^m)'' + b(u_{st}^n)' - cu_{st}^p = 0. \tag{37}$$

Положим $c_0 = (b(m-n)/[am])^{1/(m-n)}$. Известно (см. [7]), что асимптотическое поведение при $x \to -\infty$ решений задачи Коши для уравнения (37) с начальными условиями

$$u_{st}(0) = M_{15} > 0, \quad u'_{st}(0) = 0 \tag{38}$$

при $(m-p)/2 < n < m$ описывается формулой

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{u_{st}(x)}{c_0 |x|^{1/(m-n)}} = 1. \tag{39}$$

Теорема 4. *При выполнении неравенства (8) с* $h = 1/(m-1)$ *задача (1), (2) имеет обобщенное решение в некоторой полосе* S_T. *Если* $u_0(x)$ *удовлетворяет при* $x \geq 0$ *неравенству (8) с* $h < 1/(m-1)$, *а при* $x < 0$ *выполнено неравенство*

$$u_0(x) \leq u_{st}(x) \tag{40}$$

для некоторой функции $u_{st}(x)$, *удовлетворяющей (37) то задача (1), (2) разрешима в* S.

Теорема 3 для этого случая остается справедливой.

4. Случай $(m+1)/2 < n < m$. При таком соотношении показателей формула (39) остается справедливой. Обозначим $c_0^* = (bn(m-n)/[am(2m-n)])^{1/(m-n)}$. Очевидно, $c_0 > c_0^*$ при $n < m$. Через $\mathbf{K}_2$ обозначим класс неотрицательных функций $v(x,t)$, удовлетворяющих в полосе S_T неравенствам

$$v(x,t) \leq M_{16}(\alpha_7 + |x|)^{1/(m-n)}, \qquad M_{16} < c_0^*, \qquad x \leq 0, \tag{41}$$

$$v(x,t) \leq M_{17}(\alpha_8 + x)^{1/(n-1)}, \qquad x \geq 0. \tag{42}$$

Постоянные M_{16}, M_{17}, α_7, α_8 в (41), (42) могут зависеть от T и функции $v(x,t)$.

Теорема 5. *Пусть для* $u_0(x)$ *при* $x \leq 0$ *выполнено неравенство (40), а при* $x \geq 0$ *справедливо (8) с* $h = 1/[2(n-1)]$. *Тогда задача (1), (2) разрешима в некоторой полосе* S_T. *Если дополнительно для* $u_0(x)$ *выполняется неравенство (41), то минимальное обобщенное решение задачи (1), (2)* $u(x,t) \in \mathbf{K}_2$.

Теорема 6. *Обобщенное решение задачи Коши (1), (2) единственно в произвольной полосе* S_T *в классе функций* $\mathbf{K}_2$.

5. Случай $n = m$. Введем в рассмотрение класс $\mathbf{K}_3$ определенных в S_T неотрицательных функций $v(x,t)$, удовлетворяющих (41) и неравенству

$$v(x,t) \leq \varepsilon(x)\exp(-bx/[am]), \quad x \leq 0, \tag{43}$$

где $\varepsilon(x) \geq 0$ и $\lim_{x \to -\infty} \varepsilon(x) = 0$. Постоянные M_{17}, α_8 и функция $\varepsilon(x,t)$ могут зависеть от T и функции $v(x,t)$.

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что функции

$$\varphi_{st}(x) = [M_{16}\exp(-bx/[am]) - \alpha_8]^{1/m}$$

являются стационарными классическими суперрешениями уравнения (1).

Теорема 7. *Пусть* $u_0(x)$ *удовлетворяет при* $x \geq 0$ *неравенству (8), а при* $x \leq 0$ *– неравенству* $u_0(x) \leq \omega_{st}(x)$. *Тогда при* $h < 1/[2(n-1)]$ *задача (1), (2) имеет обобщенное решение в* S *а при* $h = 1/[2(n-1)]$ *– в некоторой полосе* S_T

Теорема 8. *Обобщенное решение задачи Коши (1). (2) единственно в произвольной полосе* S_T *в классе функций* $\mathbf{K}_3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Diaz J.I., Kersner R.** On a nonlinear degenerate parabolic equation in infiltration or evaporation through a porous medium // J. Diff. Equat. 1987. V. 69. № 3 – P. 368–403.
2. **Gilding B.H.** Improved theory for a nonlinear degenerate parabolic equation // Annali Scu. Norm. Sup. Pisa. Cl. Sci. 4. 1989. V. 16. – P. 165–224.
3. **Гладков А.Л.** О задаче Коши в классах растущих функций для уравнения фильтрации с конвекцией // Мат. сборник. 1995. Т. 186, № 6. – С. 35–56.
4. **Гладков А.Л.** Задача Коши для некоторых вырождающихся квазилинейных параболических уравнений с поглощением // Сиб. мат. журнал. 1993. Т. 34, № 1. – С. 47–64.
5. **Калашников А.С.** О влиянии поглощения на распространение тепла в среде с теплопроводностью, зависящей от температуры // ЖВМ и МФ. 1976. Т. 16. – С. 689–696.
6. **Kamin S., Peletier L.A., Vazquez J.L.** A nonlinear diffusion-absorption equation with unbounded initial data // Nonlinear Diffusion Equations and their Equilibrium States. 1992. V. 3. – P. 243–263.
7. **Прохожий С.А.** О поведении на бесконечности решений некоторых нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Веснік ВДУ, 1999, № 4(14). – С. 83–90.

S U M M A R Y

Existence and uniqueness of the solutions of the Cauchy problem for the equation $u_t = a(u^m)_{xx} + b(u^n)_x - cu^p$ *with* $m \geq n \geq 1 > p > 0$ *are investigated for the different parities of the powers* m, n p

Поступила в редакцию 1.04.2003