УДК 512.542

Е.А. Задорожнюк

О p-сверхразрешимости конечных групп

Все рассматриваемые нами в данной работе группы конечны. Напомним что группа называется сверхразрешимой, если она обладает нормальным рядом с циклическими факторами. Согласно Хупперту [1] группа сверхразрешима тогда и только тогда, когда индексы ее максимальных подгрупп являются простыми числами. Этот красивый и весьма нетривиальный результат положил начало большому числу исследований, связанных с нахождением критериев сверхразрешимости группы [2] и изучением различных обобщений сверхразрешимых групп. Одним из таких обобщений является понятие p-сверхразрешимой группы.

Напомним, что группа называется p-сверхразрешимой (p – простое число), если каждый ее главный фактор является либо p'-группой, либо циклической группой.

В данной работе мы будем иметь дело со специальным типом сверхразрешимых групп – со строго p-замкнутыми группами. Напомним это определение. Группа G называется строго p-замкнутой, если силовская p-подгруппа G_p этой группы нормальна в ней, а факторгруппа G/G_p является абелевой группой экспоненты, делящей $p-1$ [2, с. 5]. Напомним также, что для каждого натурального числа n символом $\mathfrak{A}(n)$ обозначается класс всех тех абелевых групп, экспоненты которых делят n [3]. Остальные используемые определения и обозначения стандартны и соответствуют принятым в [4].

Нам потребуется следующая лемма доказательство которой осуществляется простой проверкой.

Лемма. *Подгруппа и факторгруппа строго p-замкнутой группы являются строго p-замкнутыми.*

Теорема 1. *Пусть G – p-разрешимая группа, где $p \neq 2$, и N – нормальная в G подгруппа, такая, что G/N – p-сверхразрешимая факторгруппа. Предположим, что для любой нециклической p-подгруппы A из N все ее минимальные подгруппы пронормальны в G. Тогда G – p-сверхразрешимая группа.*

Доказательство. Пусть A – некоторая нециклическая p-подгруппа группы N. Покажем сначала, что факторгруппа $N_G(A)/C_G(A)$ строго p-замкнута. Пусть x – элемент из группы A порядка p. Подгруппа $< x >$ субнормальна в $H = N_G(A)$. По условию подгруппа $< x >$ пронормальна в группе G, а значит, и в группе $N_G(A)$. По лемме 1.6.3 [4] из субнормальности и пронормальности подгруппы $< x >$ в группе H следует, что $< x >$ нормальна в H. Так как $\Omega_1(A)\,\mathrm{char}A$, и так как группа A нормальна в группе H, то группа $\Omega_1(A)$ нормальна в H. Поэтому и группа $C_H(\Omega_1(A))$ нормальна в H. Очевидно, что

$$C = C_G(A) \leq C_H(\Omega_1(A)).$$

Покажем, что факторгруппа $C_H(\Omega_1(A))/C$ является p-подгруппой группы H/C.

Предположим противное т.е. допустим, что порядок некоторого неединичного элемента $gC \in C_H(\Omega_1(A))/C$ является p'-числом. Группа $< gC >$ действует сопряжениями на A, причем действие группы $< gC >$ на $\Omega_1(A)$ тривиально. Значит, ввиду теоремы 5.2.4 [5] группа $< gC >$ действует тривиально и на A, т.е. имеет место $gC = C$, что противоречит выбору элемента gC. Поэтому $C_H(\Omega_1(A))/C$ является p-группой. Так как $|x| = p$, то по теореме 1.1.4 [2] факторгруппа $N_H(< x >)/C_H(< x >)$ является абелевой группой экспоненты, делящей $p-1$.

Значит,

$$\Big(\bigcap_{x\in\Omega_1(A)} N_H(< x >)\Big)/\Big(\bigcap_{x\in\Omega_1(A)} C_H(< x >)\Big) \in \mathfrak{A}(p-1).$$

Любая подгруппа последней факторгруппы является абелевой группой экспоненты, делящей $p-1$. Поскольку очевидно, что

$$C_H(\Omega_1(A)) = \bigcap_{x\in\Omega_1(A)} C_H(< A >) \text{ и } H \leq \bigcap_{x\in\Omega_1(A)} N_H(< x >),$$

то

$$H/\bigcap_{x\in\Omega_1(A)} C_H(< x >) = H/C_H(\Omega_1(A)) \in \mathfrak{A}(p-1).$$

Но так как

$$H/C_H(\Omega_1(A)) \cong (H/C)/(C_H(\Omega_1(A))/C),$$

то факторгруппа H/C строго p-замкнута.

Докажем теперь, что группа G является p-сверхразрешимой. Предположим, что теорема не верна, т.е. существуют не p-сверхразрешимые группы, удовлетворяющие условию теоремы. Выберем среди таких групп группу G, имеющую наименьший порядок. Пусть K – минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в N. Поскольку по условию группа G является p-разрешимой, то K – либо элементарная абелева p-группа, либо p'-группа. Обозначим $\overline{G} = G/K$, $\overline{N} = N/K$.

Если K – элементарная абелева p-группа, то для каждой нециклической p-подгруппы $\bar{A} = A/K$ из $\bar{N}$ подгруппа A является нециклической p-подгруппой в N, и поэтому факторгруппа $N_G(A)/C_G(A)$ является строго p-замкнутой по доказанному выше. Ввиду леммы факторгруппа $(N_G(A)/K)/(C_G(A)K/K)$ строго p-замкнута. Из того, что

$$N_G(A)/K = N_{G/K}(A/K) \text{ и } C_{G/K}(A/K) \geq C_G(A)K/K$$

следует, что факторгруппа $N_{\bar{G}}(\bar{A})/C_{\bar{G}}(\bar{A})$ строго p-замкнута.

Если K – p'-группа, то для каждой нециклической p-подгруппы $\bar{A} = H/K$ из группы $\bar{N}$ имеет место $H = AK$, где A – нециклическая силовская p-подгруппа из H. Так как факторгруппа $N_G(A)/C_G(A)$ строго p-замкнута, то и

$$N_G(A)K/C_G(A)K \cong N_G(A)/C_G(A)(N_G(A)\cap K) = N_G(A)/C_G(A)N_K(A) \cong$$
$$\cong (N_G(A)/C_G(A))/(C_G(A)N_K(A)/C_G(A))$$

также строго p-замкнута. Очевидно, что

$$C_{\bar{G}}(\bar{A}) \geq C_G(A)K/K.$$

Согласно теореме 3.16 [6]

$$N_{\bar{G}}(\bar{A}) = N_G(A)K/K.$$

Значит, и факторгруппа $N_{\bar{G}}(\bar{A})/C_{\bar{G}}(\bar{A})$ строго p-замкнута.

Так как $|\bar{G}| < |G|$, то ввиду выбора группы G факторгруппа G/K p-сверхразрешима. Если K – p'-группа, то G p-сверхразрешима. Противоречие. Значит, K – элементарная абелева p-группа. По доказанному выше факторгруппа $G/C_G(K)$ является строго p-замкнутой.

Так как по лемме 3.9 [7] факторгруппа $G/C_G(K)$ не содержит неединичных p-подгрупп, то $G/C_G(K) \in \mathfrak{A}(p-1)$.

Ввиду теоремы 1.1.4 [2] $|K| = p$. Отсюда следует, что группа G является p-сверхразрешимой. Вновь полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Аналогично можно доказать и следующую теорему, однако мы дадим другое ее доказательство, апеллирующее к теории критических групп

Теорема 2. *Пусть G – разрешимая группа, N – нормальная в G подгруппа, такая, что G/N – 2-нильпотентная факторгруппа. Предположим, что для любой нециклической 2-подгруппы A из N выполняется одно из следующих двух условий:*

1) A – абелева группа и все ее минимальные подгруппы пронормальны в G;

2) A – неабелева группа и все ее минимальные подгруппы и подгруппы порядка 4 пронормальны в G.

Тогда G – 2-нильпотентная группа.

Доказательство. Допустим, что теорема не верна, т.е. существуют не 2-нильпотентные группы, удовлетворяющие условию теоремы. Выберем среди таких групп группу G, имеющую наименьший порядок. Пусть H – произвольная собственная подгруппа группы G. Ввиду разрешимости G ее подгруппа H также разрешима. Так как подгруппа N нормальна в G, то и группа $N\cap H$ нормальна в H. Подгруппа 2-нильпотентной группы является 2-нильпотентной, поэтому факторгруппа $H/(N\cap H) \cong HN/N$ 2-нильпотентна.

Пусть A – любая нециклическая 2-подгруппа из группы $N \cap H$. Тогда по предположению, что условия теоремы выполняются для группы G, и ввиду того, что подгруппа, пронормальная в группе, пронормальна и в любой ее подгруппе, следует, что группа A удовлетворяет одному из следующих двух условий:

1) A – абелева группа и все ее минимальные подгруппы пронормальны в H;

2) A – неабелева группа и все ее минимальные подгруппы и подгруппы порядка 4 пронормальны в H.

Так как группа H удовлетворяет условиям теоремы и $|H| < |G|$, то ввиду выбора группы G подгруппа H является 2-нильпотентной. Итак, G – минимальная не 2-нильпотентная группа. По теореме IV.5.4 [8] следует, что G – группа Шмидта, т.е. минимальная ненильпотентная группа. Для группы Шмидта G справедливы следующие утверждения [7]:

1) G – разрешимая бипримарная группа;

2) $G^{\mathfrak{N}}$ является силовской q-подгруппой в G, q – простое число;

3) $G^{\mathfrak{N}}/\Phi(G^{\mathfrak{N}})$ – главный фактор группы G;

4) если $G^{\mathfrak{N}}$ абелева, то $\Phi(G^{\mathfrak{N}}) = 1$;

5) если $G^{\mathfrak{N}}$ неабелева, то ее центр, коммутант и подгруппа Фраттини совпадают и имеют экспоненту p;

6) если $p = 2$, то экспонента $G^{\mathfrak{N}}$ не превышает 4.

Уточним строение группы G. Если порядок группы G не делится на 2, то G является 2-нильпотентной группой, что противоречит предыдущему. Значит, 2 делит порядок группы G, т.е. $\pi(G) = \{2, p\}$. Если силовская p-подгруппа G_p нормальна в группе G, то G является 2-нильпотентной группой, что невозможно. Значит, силовская 2-подгруппа G_2 нормальна в G. Таким образом $G = [G_2]G_p$.

Из того, что группа G/N 2-нильпотентна, следует, что факторгруппа NG_p/N нормальна в группе G/N. Кроме того ясно, что NG_2/N нормальна в группе G/N. Итак, G/N является нильпотентной группой. Тогда $G_2 = G^{\mathfrak{N}} \subseteq N$.

Если группа G_2 абелева, то $\Phi(G_2) = 1$ и $G_2/\Phi(G_2) = G_2/1$ – главный фактор группы G. Предположим, что $|G_2| \neq 2$. По условию теоремы все минимальные подгруппы из G_2 пронормальны в G. Кроме того, в группе G_2 все подгруппы субнормальны, поэтому по лемме 1.6.3. [4] все минимальные подгруппы из G_2 нормальны в G. Так как $G_2 = Z_1 \times \ldots \times Z_t$, где $Z_1 \cong \ldots \cong Z_t$ – группа порядка 2, то группы $Z_1, \ldots, Z_t$ нормальны в G, что невозможно, так как G_2 – минимальная нормальная подгруппа в G. Таким образом, $t = 1$ и $G_2 = Z_1$ – группа порядка 2. Противоречие. Значит, $|G_2| = 2$. Но тогда по теореме 1.1.4 [2]

$$G/C_G(G_2) \in \mathfrak{A}(p-1) = (1), \text{ т. е. } G = C_G(G_2).$$

Значит, $G_2 \subseteq Z(G)$. Но G/G_2 – нильпотентная группа, поэтому и G является нильпотентной группой. Противоречие.

Следовательно, G_2 – неабелева группа. Тогда ее центр, коммутант и подгруппа Фраттини совпадают и имеют экспоненту 2, а экспонента G_2 равна 4.

Пусть x – любой элемент порядка 4 из G_2 и $T = \langle x \rangle$. Тогда $|T| = 4$. Понятно, что подгруппа T нормальна в группе G. А так как $\Phi(G_2) \subseteq T\Phi(G_2) \subseteq G_2$

и $G_2 / \Phi(G_2)$ – главный фактор группы G, то либо $\Phi(G_2) = T\Phi(G_2)$, т.е. $T \subseteq \Phi(G_2)$, либо $T\Phi(G_2) = G_2$. Ввиду того, что T – группа экспоненты 4, а экспонента группы $\Phi(G_2)$ равна 2, первое равенство невозможно. Значит, $T\Phi(G_2) = G_2$ и мы имеем

$$T / T \cap \Phi(G_2) \cong T\Phi(G_2) / \Phi(G_2) = G_2 / \Phi(G_2).$$

Так как T – циклическая группа, то факторгруппа $G_2 / \Phi(G_2)$ является нильпотентной группой, что противоречит равенству $G_2 = G^{\mathfrak{N}}$. Теорема доказана.

Следствие. *Пусть N – нормальная подгруппа группы G, такая, что факторгруппа G / N сверхразрешима. Если каждая минимальная подгруппа любой нециклической p-подгруппы A из N пронормальна в G, а при $p = 2$ и каждая подгруппа из A порядка 4 пронормальна в G, то группа G сверхразрешима.*

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Huppert B.*** Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen // Math. Zeitschr., 1954, Bd. 60. – S. 409-434.
2. ***Weinstein M.*** Between Nilpotent and Solvable. Polygonal Publishing House, 1982.
3. ***Шеметков Л.А., Скиба А.Н.*** Формации алгебраическмх систем. – М., 1989. – 253 с.
4. ***Doerk K., Hawkes T.*** Finite soluble groups. Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1992. – 889 p.
5. ***Gorenstein D.*** Finite Groups. Harper and Row, New York, reprinted by Chelsea, New York, 1980.
6. ***Kurzweil H.*** Endliche Gruppen. Chelsea Publishing Company. New York. 1980.
7. ***Шеметков Л.А.*** Формации конечных групп. – М., 1978. – 272 с.
8. ***Huppert B.*** Endliche Gruppen I. Berlin: Springer – Verlag, 1967. – 793 s.

S U M M A R Y

It is proved that if N is a normal subgroup of a p-solvable finite group G with p-supersolvable faktorgroup G / N and if for every noncyclic p-subgroup A from N all its minimal subgroups are pronormal in G, than G is p-supersolvable.