УДК 539.3

П.А. Гладков

# Асимптотическое решение краевой задачи для волнового уравнения в упругом плоском искривленном волноводе

**Введение.** В работе строится формальное асимптотическое решение краевой задачи для волнового уравнения в среде, ограниченной волноводом произвольного поперечного сечения с центральной осью, искривленной в плоскости.

В стационарном случае решение волнового уравнения, определяющего процесс волнового распространения в окрестности луча, было построено в [1]. Нестационарное решение, локализованное возле пространственно-временного луча, было получено в [2, 3]. Метод построения стационарных и нестационарных решений краевых задач был также описан В.П. Масловым в [4]. Нестационарные задачи о волновом движении в упругих средах и зависимость их решений от начальных условий рассматривались в [5–7].

В настоящей работе для решения краевой задачи используется асимптотический метод, описанный в [8] при исследовании волновых процессов в цилиндрической оболочке. Данный подход позволяет свести трехмерную краевую задачу к последовательности одномерных [8, 9] или двухмерных краевых задач. Упомянутый метод был применен также для изучения движущихся волновых пакетов в нецилиндрической оболочке с косыми краями [10], в бесконечной цилиндрической оболочке с непостоянным внутренним давлением [11] и в прямом волноводе с круглым поперечным сечением [9]. В работе [12] построено решение краевой задачи для волнового уравнения в упругой среде, ограниченной волноводом произвольного сечения, центральная ось которого – прямая линия.

**1. Постановка задачи.** Будем рассматривать криволинейную систему координат, координаты которой $(r, \varphi, z)$ определяют Декартовы координаты $(x, y, z)$ следующим образом:

$$x = r\sin\varphi,$$
$$y = Y(z) - r\cos\varphi, \qquad (1.1)$$
$$z = z.$$

Здесь $Y(z)$ – заданная непрерывная и дифференцируемая по $z$ функция.

Рассмотрим в введенных криволинейных координатах поверхность

$$\Omega = \{(r,\varphi,z) : r = \tilde{f}[\varphi, z], 0 \le \varphi < 2\pi, -\infty < z < +\infty\}, \qquad (1.2)$$

ограничивающую упругий волновод с произвольным поперечным сечением, искривленный в плоскости $Oyz$ Декартовой системы координат.

Волновое уравнение, определяющее движение упругой среды, ограниченной поверхностью волновода, имеет вид:

$$\Delta U - \frac{1}{c^2(z,t)}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0. \qquad (1.3)$$

Здесь $\Delta$ – оператор Лапласа в криволинейных координатах:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{g(z)}\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{Y'(z)Y''(z)}{g^2(z)}\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{c^2(z,t)}\frac{\partial^2}{\partial t^2}, \qquad (1.4)$$

$$g(z) = \frac{1}{1 + Y'^2(z)}.$$

На границе $\Omega$ потребуем выполнение условия отсутствия смещения:

$$U\big|_{\Omega} = 0. \qquad (1.5)$$

**2. Метод решения.** Решение задачи (1.3), (1.5) будем конструировать в виде семейства волн, бегущих вдоль оси $Oz$ и локализованных в окрестности плоскости $z = q(t)$, которую в дальнейшем будем называть центром волнового пакета.

Будем искать высокочастотные колебания с мгновенной частотой колебаний $\varepsilon^{-1}\omega(t)$ и длиной волны порядка $\varepsilon$, где $\varepsilon$ – малый параметр.

Принимая во внимание локальный характер решения задачи, удобно ввести локальную систему координат следующим образом:

$$z = q(t) + \varepsilon^{1/2}\xi, \quad r = \varepsilon\rho. \qquad (2.1)$$

В таком случае $0 < \rho < f[\varphi, z] = \varepsilon^{-1}\tilde{f}[\varphi, z]$.

С учетом (2.1) и (1.4), уравнение (1.3) примет вид:

$$c^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} + \varepsilon\frac{1}{g(z)}\frac{\partial^2 U}{\partial\xi^2} + \varepsilon^{3/2}\frac{Y'(z)Y''(z)}{g^2(z)}\frac{\partial U}{\partial\xi}\right)$$
$$-\varepsilon^2\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + 2\varepsilon^{3/2}\dot{q}\frac{\partial^2 U}{\partial\xi\partial t} - \varepsilon\dot{q}^2\frac{\partial^2 U}{\partial\xi^2} + \varepsilon^{3/2}\ddot{q}\frac{\partial U}{\partial\xi} = 0. \qquad (2.2)$$

Функции $c(z,t)$, $f[\varphi, z]$, $g(z)$, $Y'(z)$, $Y''(z)$ вблизи центра волнового пакета $z = q(t)$ разложим в ряд Тейлора. Например,

$$c(z,t) = c[q(t),t] + \varepsilon^{1/2}c'[q(t),t]\xi + \frac{1}{2}\varepsilon c''[q(t),t]\xi^2 + \cdots. \qquad (2.3)$$

Решение краевой задачи будем искать в виде:

$$U = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{k/2}u_k(\rho,\xi,\varphi,t)\exp\{i\varepsilon^{-1}S(\xi,t,\varepsilon)\}, \qquad (2.4)$$

$$S = \int\omega(t)dt + \varepsilon^{1/2}p(t)\xi + \tfrac{1}{2}\varepsilon b(t)\xi^2, \quad \mathrm{Im}\,b(t) > 0, \qquad (2.5)$$

где $u_k(\rho,\xi,\varphi,t)$ – полиномы по $\xi$, $p(t)$ – волновое число, функция $b(t)$ характеризует ширину волнового пакета.

Подстановка (2.4) в уравнение (2.2) дает последовательность краевых задач.

$$\sum_{j=0}^{k} L_j u_{k-j} = 0\,,\quad k = 1,2,\dots, \tag{2.6}$$

$$\sum_{j=0}^{k} \Gamma_j u_{k-j}\big|_{\rho=f[\varphi,q(t)]} = 0\,,\quad k = 1,2,\dots, \tag{2.7}$$

Вид операторов $L_j$, $\Gamma_j$ определяется в работе [9].

**2.1. Нулевое и первое приближение.** В нулевом приближении ($k$=0) имеем следующую краевую задачу:

$$L_0 u_0 \equiv c^2\left[q(t),t\right]\left[\frac{\partial^2 u_0}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_0}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u_0}{\partial\varphi^2}-p^2 g u_0\right]+\left(\omega-\dot{q}p\right)^2 u_0 = 0\,, \tag{2.8}$$

$$u_0\{f[\varphi,q(t)],\xi,\varphi,t\} = 0\,. \tag{2.9}$$

Решение (2.8), (2.9) сводится к задаче о собственном значении краевой задачи с однородным краевым условием (2.9) для уравнения

$$\Delta u + \lambda u = 0\,, \text{ где} \tag{2.10}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\,. \tag{2.11}$$

Пусть $\lambda$ – собственное значение краевой задачи (2.9), (2.10), а $u_0^*(\rho,\varphi,t)$ – соответствующая этому значению собственная функция. Краевая задача (2.8), (2.9) будет иметь нетривиальное решение лишь в том случае, если выполняется условие

$$\omega(t) = \dot{q}(t)p(t) - H^{\pm}[p(t),q(t),t]\,, \tag{2.12}$$

где

$$H^{\pm}(p,q,t) = \pm c(q,t)\sqrt{p^2 g + \lambda(q)}\ - \tag{2.13}$$

функция Гамильтона.

В первом приближении ($k$=1) имеем задачу

$$L_0 u_1 = -L_1 u_0\,, \tag{2.14}$$

$$u_1 = -\Gamma_1 u_0 \text{ при } \rho = f[\varphi,q(t)]\,. \tag{2.15}$$

Решение данной задачи имеет вид

$$u_1(\rho,\xi,\varphi,t) = P_1(\xi,t)u_0^*(\rho,\varphi,t) + u_1^{(P)}(\rho,\xi,\varphi,t)\,, \tag{2.16}$$

где $P_1(\xi,t)$ – неизвестный полином по $\xi$, подлежащий определению, $u_1^{(P)}(\rho,\xi,\varphi,t)$ – частное решение уравнения (2.14).

Принимая во внимание самосопряженность краевой задачи (2.8), (2.9), получим равенство

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{f[\varphi,q]} \rho u_0\left(L_0 u_1 + L_1 u_0\right) d\rho\, d\varphi = 0\,, \tag{2.17}$$

являющееся условием существования $u_1(\rho,\xi,\varphi,t)$ в виде (2.16).

В [9] отмечено, что равенство (2.17) влечет за собой соотношение

$$b\left(\dot{q}-\frac{\partial H}{\partial p}\right)\xi P_0 - \left(\dot{p}+\frac{\partial H}{\partial q}\right)\xi P_0 - i\left(\dot{q}-\frac{\partial H}{\partial p}\right)\frac{\partial P_0}{\partial\xi} = 0\,. \tag{2.18}$$

В [6] показано, что уравнение (2.18) имеет решение в полиномиальной форме лишь в том случае, если функции $p$ и $q$ удовлетворяют системе Гамильтона

$$\dot{q} = \partial H/\partial p\,,\ \ \dot{p} = -\partial H/\partial q\,. \tag{2.19}$$

Полином $P_0(\xi,t)$ в этом приближении остается неопределенным.

**2.2. Второе приближение.** Во втором приближении ($k$=2) имеем краевую задачу

$$L_0 u_2 = -L_1 u_1 - L_2 u_0\,, \tag{2.20}$$

$$u_2 = -\Gamma_1 u_1 - \Gamma_2 u_0 \text{ при } \rho = f[\varphi, q(t)]. \tag{2.21}$$

Условие разрешимости данной задачи может быть выведено из уравнения

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{f[\varphi,q]} \rho u_0 \left(L_0 u_2 + L_1 u_1 + L_2 u_0\right) d\rho d\varphi = 0\,. \tag{2.22}$$

В [9] отмечено, что равенство (2.22) влечет за собой уравнение

$$\left(\xi^2 D_b - 2D_{\xi t}\right) P_0 = 0 \tag{2.23}$$

относительно $P_0(\xi,t)$.

В [6] показано, что уравнение (2.23) имеет решение в полиномиальной форме лишь в том случае, если функция $b(t)$ является решением уравнения Риккати

$$\dot{b} + \frac{\partial^2 H}{\partial p^2} b^2 + 2\frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} b + \frac{\partial^2 H}{\partial q^2} = 0\,. \tag{2.24}$$

Принимая во внимание (2.24), условие (2.23) принимает вид амплитудного уравнения для определения полинома $P_0(\xi,t)$:

$$h_0(t)\frac{\partial^2 P_0}{\partial \xi^2} + h_1(t)\xi\frac{\partial P_0}{\partial \xi} + h_2\frac{\partial P_0}{\partial t} + h_3(t) P_0 = 0\,. \tag{2.25}$$

**3. Исследование динамики волновых пакетов.** Положим $c(z,t) \equiv 1$. Пусть начальные условия задачи имеют вид

$$p(0) = p_0 > 0,\ q(0) = 0\,. \tag{3.1}$$

Продифференцируем (2.15) по $p$ и $q$:

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{pg}{\pm\sqrt{p^2 g + \lambda}} = \dot{q}\,,\ \ \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p^2 g' + \lambda'}{\pm 2\sqrt{p^2 g + \lambda}} = -\dot{p} \tag{3.2}$$

Будем рассматривать положительную ветвь решения, для которой $H = \sqrt{p^2 g + \lambda}$.

Из (3.2) с учетом (3.1) видно, что в некоторой положительной окрестности точки $t = 0$ выполняется неравенство $\dot{q} > 0$.

В связи с этим возможны два случая:

А) $p^2 g' + \lambda' < 0\ \forall t$. В таком случае для всех значений $t$ $\dot{q}(t) > 0$, то есть волновой пакет движется в одном направлении.

Б) $p^2 g' + \lambda' > 0\ \forall t$. В этом случае найдется такое значение $t = t_r$, что для всех $t > t_r$ выполняется неравенство $p < 0$, а следовательно $\dot{q} < 0$. Таким образом в момент $t = t_r$ происходит отражение центра волнового пакета $q = q(t)$ от плоскости $z = z_r$.

В) Выражение $p^2 g'+\lambda'$ при $t>0$ принимает значения различных знаков. В данном случае наличие отражений волнового пакета зависит от свойств функции $g'=g'(z)$.

**4. Заключение.** В работе построены дисперсионное уравнение (2.12), система Гамильтона (2.19), уравнение Риккати (2.24) и амплитудное уравнение (2.25), описывающие распространение локализованных волн в среде, ограниченной поверхностью плоского искривленного волновода.

Исследование динамики волновых пакетов позволило определить некоторые условия, при которых происходит отражение центра волнового пакета от поперечной плоскости.

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. ***Babich V.M., Buldyrev V.S.*** Asymptotic method in short-waver diffraction theory. – Springer, Berlin, 1991.
2. ***Бабич В.М., Булдырев В.С., Молотков И.А.*** Пространственно-временной лучевой метод. Линейные и нелинейные волны. – Ленинград, 1985.
3. ***Kiselev A.P.*** Quasiphotons and nondispersive waves // Proceedings of the International seminar Day of Diffraction-97. – St. Petersburg, Russia, 1997. – P. 87–90.
4. ***Маслов В.П.*** Комплексный ВКБ метод для нелинейных уравнений. – М., 1997.
5. ***Whitham G.B.*** Linear and Nonlinear Waves. – Wiley, N. Y., 1974.
6. ***Bretherton F.P.*** Propagation in slowly varying waveguides // Proc. Roy. Soc. – London, 1968. – A 302. – P. 555–576.
7. ***Tromp J. and Dahlen F.A.*** The Berry phase of a slowly varying waveguide // Proc. Roy. Soc. – London, 1992. – A 437. – P. 329–342.
8. ***Михасев Г.И.*** О комплексном ВКБ-решении задачи Коши для уравнений движения тонкой цилиндрической оболочки // Докл. АН Беларуси, 1994. – Т. 38, № 4. – С. 24–27.
9. ***Mikhasev G.I.*** Traveling wave packets in a non-homogeneous narrow medium bounded by a surface of revolution // Wave Motion, 2003. – Vol. 37. – P. 207–217.
10. ***Михасев Г.И.*** Локализованные семейства изгибных волн в некруговой цилиндрической оболочке с косыми краями // Журнал прикладной математики и механики, 1992. – Вып. 56. – С. 635–643.
11. ***Mikhasev G.I.*** Travelling wave packets in an infinite thin cylindrical shell under internal pressure // Journal of Sound and Vibration, 1998. – Vol. 209. – P. 543–559.
12. ***Гладков П.А.*** Волновые пакеты в упругом волноводе произвольного сечения // Веснік ВДУ, 2005. – № 2(36). – С. 125–129.



## *SUMMARY*

*An asymptotic solution of the boundary-value problem for the wave equation in a plain curved waveguide with arbitrary cross-section is constructed in the form of localized families of short waves running in the longitudinal direction. The effects of reflection of the wave packet are revealed.*


*Поступила в редакцию 17.04.2006*