УДК 537.8+510.5

И.Е. Андрушкевич, Н.М. Чирвоный

Алгебра Клиффорда в системе уравнений Максвелла

1. Матричное представление уравнений Максвелла.

Уравнения Максвелла

$$rot\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\ , \ rot\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j},\ div\mathbf{D} = \rho,$$
$$div\mathbf{B} = 0,\ \mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E},\ \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \qquad (1)$$

могут быть представлены в виде [1]

$$\left\{\xi^1 \frac{\partial}{\partial x} + \xi^2 \frac{\partial}{\partial y} + \xi^3 \frac{\partial}{\partial z} + \xi^4 \mathbf{M} \frac{\partial}{\partial t} + \Theta\right\}\psi = \mathbf{PJ}, \qquad (2)$$

где ξ^i, $\left(i = \overline{1,6}\right)$ – элементарные матрицы, имеющие вид

$$\xi^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ \xi^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\xi^3 = -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad \xi^4 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad (3)$$

$$\xi^5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \xi^6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

и удовлетворяющие соотношениям

$$\xi^i\xi^j + \xi^j\xi^i = 2g^{ij}\mathbf{I}, \ \mathbf{I} = diag(1,1,1,1,1,1,1,1),$$
$$g^{ij} = \begin{cases} \delta(i,j) = \delta_{i,j}, \ i = 1,2,3,6; \\ -\delta(i,j) = \delta_{i,j}, \ i = 4,5. \end{cases} \tag{4}$$

$$\Psi^{\mathrm{T}} = (0, E_X, E_Y, -E_Z, -H_Z, H_Y, H_X, 0), \tag{5}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \varepsilon/\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu/\varepsilon \end{bmatrix}, \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

Θ – матрица размерностью 8 x 8, определяемая конкретным видом параметров ε, μ, σ.

2. Свойства матриц Максвелла.

Любое множество величин, удовлетворяющее условиям (4), является алгеброй Клиффорда. Из шести матриц ξ^i, $(i = \overline{1,6})$ образуют новые, составляя произведения каких-либо двух или более из них. Количество новых матриц равно $2^6 - 1 = 63$. Добавляя к ним единичную матрицу $\mathbf{I}$, получаем 64. Новые матрицы будем обозначать как $\Gamma^j, (j = \overline{0,63})$:

$$\Gamma^0 = \mathbf{I}, \ \Gamma^1 = \xi^1\xi^3\xi^5, \ \Gamma^2 = \xi^1\xi^4\xi^6, \ \Gamma^3 = \xi^2\xi^3\xi^4, \ \Gamma^4 = \xi^2\xi^5\xi^6,$$
$$\Gamma^5 = \xi^1\xi^2\xi^3\xi^6, \ \Gamma^6 = \xi^1\xi^2\xi^4\xi^5, \Gamma^7 = \xi^3\xi^4\xi^5\xi^6, \Gamma^8 = \xi^4, \ \Gamma^9 = \xi^1\xi^6,$$
$$\Gamma^{10} = \xi^2\xi^3, \ \Gamma^{11} = \xi^1\xi^2\xi^5, \ \Gamma^{12} = \xi^3\xi^5\xi^6, \ \Gamma^{13} = \xi^1\xi^3\xi^4\xi^5, \Gamma^{14} = \xi^2\xi^4\xi^5\xi^6,$$
$$\Gamma^{15} = \xi^1\xi^2\xi^3\xi^4\xi^6, \Gamma^{16} = \xi^5, \ \Gamma^{17} = \xi^1\xi^3, \ \Gamma^{18} = \xi^2\xi^6,$$
$$\Gamma^{19} = \xi^1\xi^2\xi^4, \Gamma^{20} = \xi^3\xi^4\xi^6, \ \Gamma^{21} = \xi^1\xi^4\xi^5\xi^6, \ \Gamma^{22} = \xi^2\xi^3\xi^4\xi^5,$$
$$\Gamma^{23} = \xi^1\xi^2\xi^3\xi^5\xi^6, \Gamma^{24} = \xi^1\xi^2, \ \Gamma^{25} = \xi^3\xi^6, \Gamma^{26} = \xi^4\xi^5, \ \Gamma^{27} = \xi^1\xi^3\xi^4,$$
$$\Gamma^{28} = \xi^1\xi^5\xi^6, \ \Gamma^{29} = \xi^2\xi^3\xi^5, \ \Gamma^{30} = \xi^2\xi^4\xi^6, \ \Gamma^{31} = \xi^1\xi^2\xi^3\xi^4\xi^5\xi^6, \Gamma^{32} = \xi^2,$$
$$\Gamma^{33} = \xi^3\xi^4, \ \Gamma^{34} = \xi^5\xi^6, \ \Gamma^{35} = \xi^1\xi^3\xi^6, \ \Gamma^{36} = \xi^1\xi^4\xi^5,$$
$$\Gamma^{37} = \xi^1\xi^2\xi^3\xi^5, \Gamma^{38} = \xi^1\xi^2\xi^4\xi^6, \ \Gamma^{39} = \xi^2\xi^3\xi^4\xi^5\xi^6, \Gamma^{40} = \xi^3, \ \Gamma^{41} = \xi^1\xi^5,$$

$$\Gamma^{42}=\xi^2\xi^4,\ \Gamma^{43}=\xi^1\xi^2\xi^6,\Gamma^{44}=\xi^4\xi^5\xi^6,\ \Gamma^{45}=\xi^1\xi^3\xi^4\xi^6,\ \Gamma^{46}=\xi^2\xi^3\xi^5\xi^6,$$
$$\Gamma^{47}=\xi^1\xi^2\xi^3\xi^4\xi^5,\Gamma^{48}=\xi^6,\ \Gamma^{49}=\xi^1\xi^4,\Gamma^{50}=\xi^2\xi^3,\ \Gamma^{51}=\xi^1\xi^2\xi^3,$$
$$\Gamma^{52}=\xi^3\xi^4\xi^5,\ \Gamma^{53}=\xi^1\xi^3\xi^5\xi^6,\ \Gamma^{54}=\xi^2\xi^3\xi^4\xi^6,\Gamma^{55}=\xi^1\xi^2\xi^4\xi^5\xi^6,\Gamma^{56}=\xi^1,$$
$$\Gamma^{57}=\xi^3\xi^5,\ \Gamma^{58}=\xi^4\xi^6,\ \Gamma^{59}=\xi^2\xi^3\xi^6,\ \Gamma^{60}=\xi^2\xi^4\xi^5,\Gamma^{61}=\xi^1\xi^2\xi^3\xi^4,$$
$$\Gamma^{62}=\xi^1\xi^2\xi^5\xi^6,\ \Gamma^{63}=\xi^1\xi^3\xi^4\xi^5\xi^6. \tag{7}$$

Матрицы (7) обладают следующими свойствами [2, 3]: 1) $\Gamma^l\Gamma^m=\lambda_{lm}\Gamma^n,\lambda_{lm}=\pm1$; 2) $\Gamma^l\Gamma^m=\pm\mathbf{I}$ тогда и только тогда, когда $l=m$; 3) $\Gamma^l\Gamma^m=\pm\Gamma^m\Gamma^l$; 4) для любой $\Gamma^l\neq\mathbf{I}$ существует матрица Γ^m, такая, что $\Gamma^m\Gamma^l\Gamma^m=-\Gamma^l$; 5) $\mathrm{Sp}\left(\Gamma^l\right)=0\quad(\Gamma^l\neq\mathbf{I})$; 6) сумма $\sum\limits_{i=0}^{63}\mu_i\Gamma^i=0$ тогда и только тогда, когда $\mu_i=0,\ i=0,1,2,\ldots,63$; 7) любая матрица $\mathbf{A}$, коммутирующая со всеми матрицами Γ^l $\left(\mathbf{A}\Gamma^l-\Gamma^l\mathbf{A}=0,l=0,1,2,\ldots,63\right)$ кратна единичной; 8) если заданы два набора матриц ξ^i и $\tilde{\xi}^i$, удовлетворяющих соотношениям (4), то существует матрица $\mathbf{S}$ $\left(\det(\mathbf{S})\neq0\right)$, такая, что $\tilde{\xi}^i=\mathbf{S}\xi^i\mathbf{S}^{-1}$.

В силу выполнения перечисленных свойств, любая матрица $\mathbf{A}$ размерности 8×8 единственным образом может быть представлена в виде линейной суперпозиции матриц Γ^i:

$$\mathbf{A}=\sum_{i=0}^{63}\mu_{ai}\Gamma^i \tag{8}$$

Свойства матриц (3), (7), (8) являются основанием для использования алгебраического метода разделения переменных (АМРП) [4] в исследованиях уравнений Максвелла (2). Однако, в силу размерности матриц (7), без применения ЭВМ АМРП реализовать затруднительно из-за громоздких матричных вычислений.

Целью данных исследований является разработка алгоритма и прикладных программ, позволяющих реализовать соотношение (8). По своей сути такая задача представляет собой первый необходимый этап адаптации АМРП к уравнению (2).

3. Алгоритм реализации поставленной задачи.

Пусть имеется произвольная матрица $\mathbf{A}$ размерности 8×8, в которой $a_{i,j}\neq0$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} & a_{1,6} & a_{1,7} & a_{1,8} \\ a_{2,1} & a_{1,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} & a_{2,6} & a_{2,7} & a_{2,8} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} & a_{3,6} & a_{3,7} & a_{3,8} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} & a_{4,6} & a_{4,7} & a_{4,8} \\ a_{5,1} & a_{5,2} & a_{5,3} & a_{5,4} & a_{5,5} & a_{5,6} & a_{5,7} & a_{5,8} \\ a_{6,1} & a_{6,2} & a_{6,3} & a_{6,4} & a_{6,5} & a_{6,6} & a_{6,7} & a_{6,8} \\ a_{7,1} & a_{7,2} & a_{7,3} & a_{7,4} & a_{7,5} & a_{7,6} & a_{7,7} & a_{7,8} \\ a_{8,1} & a_{8,2} & a_{8,3} & a_{8,4} & a_{8,5} & a_{8,6} & a_{8,7} & a_{8,8} \end{bmatrix}=\left\|a_{i,j}\right\|^8. \tag{9}$$

При решении поставленной задачи в прикладных математических пакетах [5–9] приходится решать систему из 64 уравнений с 64 неизвестными. Проведенные исследования показали неспособность этих пакетов решать поставленную задачу «в лоб». Нам удалось разработать принципиально новый алгоритм этой задачи.

Введем в рассмотрение матрицу Ω и восемь матриц $\mathbf{A}^\beta$ такие, что

$$\Omega = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 8 & 7 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 7 & 8 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 8 & 7 & 6 & 5 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 5 & 8 & 7 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 7 & 8 & 5 & 6 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \left\| \omega_{i,j} \right\|^8 \qquad (10)$$

$$\mathbf{A}^\beta = \left\| a_{i,j}^\beta \right\|^8, a_{i,j}^\beta = \delta\left(\omega_{\beta,i}, j\right) a_{i,j}, \ \beta = 1,2,\ldots,8. \qquad (11)$$

Легко убедиться, что матрицы (11), (9) связаны соотношением

$$\mathbf{A} = \sum_{\beta=1}^{8} \mathbf{A}^\beta. \qquad (12)$$

Для матриц (11) справедлива

Теорема 1.

$$\sum_{\beta=1}^{8} b_\beta \mathbf{A}^\beta = 0 \ \textit{тогда и только тогда, когда} \ b_\beta = 0, \beta = \overline{1,8}. \qquad (13)$$

Доказательство. С учетом (11) соотношение (13) приобретает вид

$$\begin{gathered} \left(b_1 \delta\left(\omega_{1,i}, j\right) + b_2 \delta\left(\omega_{2,i}, j\right) + b_3 \delta\left(\omega_{3,i}, j\right) + b_4 \delta\left(\omega_{4,i}, j\right) + \right. \\ \left. + b_5 \delta\left(\omega_{5,i}, j\right) + b_6 \delta\left(\omega_{6,i}, j\right) + b_7 \delta\left(\omega_{7,i}, j\right) + b_8 \delta\left(\omega_{8,i}, j\right)\right) a_{i,j} = 0 \end{gathered} \qquad (14)$$

где $i, j = \overline{1,8}$.

Учитывая тот факт, что матрица (9) произвольная, приходим к заключению, что (14) может быть выполнено тогда, и только тогда, когда выполняется соотношение

$$\begin{gathered} b_1 \delta\left(\omega_{1,i}, j\right) + b_2 \delta\left(\omega_{2,i}, j\right) + b_3 \delta\left(\omega_{3,i}, j\right) + b_4 \delta\left(\omega_{4,i}, j\right) + \\ + b_5 \delta\left(\omega_{5,i}, j\right) + b_6 \delta\left(\omega_{6,i}, j\right) + b_7 \delta\left(\omega_{7,i}, j\right) + b_8 \delta\left(\omega_{8,i}, j\right) = 0 \end{gathered} \qquad (15)$$

Рассматривая соотношения (15) для случаев $(i = 1, j = 1)$, $(i = 1, j = 2)$, $(i = 1, j = 3)$, $(i = 1, j = 4)$, $(i = 1, j = 5)$, $(i = 1, j = 6)$, $(i = 1, j = 7)$,

$(i=1, j=8)$, соответственно получаем

$$b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = b_5 = b_6 = b_7 = b_8 = 0\,, \qquad (16)$$

что и требовалось доказать.

Матрицы (7) будем обозначать аналогично (9):

$$\Gamma^m = \left\| v_{i,j}^m \right\|^8, m = \overline{0,63}\,,\ w_{i,j}^{8(\beta-1)+n} = \delta(\omega_{\beta,i}, j) v_{i,j}^{8(\beta-1)+n} \qquad (17)$$

Тогда, очевидно,

$$\Gamma^{8(\beta-1)+n} = \left\| w_{i,j}^{8(\beta-1)+n} \right\|^8,\ \beta = 1,2,\dots,8\,,\ n = 0,1,\dots,7\,. \qquad (18)$$

В принятых обозначениях соотношение (8) приобретает вид:

$$\sum_{\beta=1}^{8} \left\| a_{i,j}^{\beta} \right\|^8 = \sum_{\beta=1}^{8} \left(\sum_{n=0}^{7} \mu_{8(\beta-1)+n} \left\| w_{i,j}^{8(\beta-1)+n} \right\|^8 \right), \qquad (19)$$

или с учетом теоремы 1 равенство (18) эквивалентно следующим восьми:

$$\delta(\omega_{\beta,i}, j) a_{i,j} = \sum_{n=0}^{7} \mu_{8(\beta-1)+n} \delta(\omega_{\beta,i}, j) v_{i,j}^{8(\beta-1)+n}, \beta = 1,2,\dots,8\,. \qquad (20)$$

Для систем уравнений (20) справедлива

Теорема 2. *Системы уравнений (20) имеют решения вида*

$$\mu_{8(\beta-1)+n} = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^{8} \sum_{j=1}^{8} \delta(\omega_{\beta,i}, j) a_{i,j} v_{i,j}^{8(\beta-1)+n}, \beta = 1,2,\dots,8\,. \qquad (21)$$

Доказательство: осуществляется путем простой подстановки (21) в (20).

Таким образом, на основании доказанных теорем решение задачи сводится к вычислениям (21).

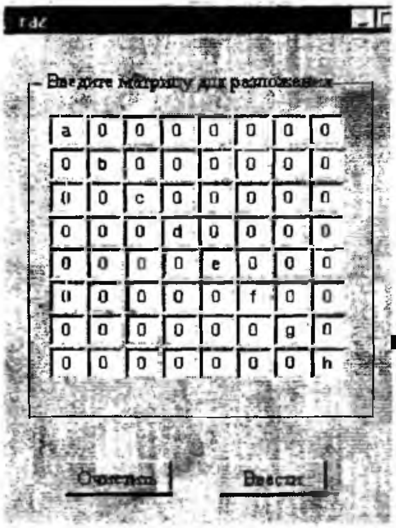
4. Программная реализация алгоритма.

Решение данной задачи реализовано в системе MATLAB 7 фирмы MathWorks. При программировании учитывалось, что данная задача является всего небольшой частью будущего комплекса программ для работы с АРМП в исследовании уравнений Максвелла. Поэтому задача оформлена в виде процедур и функций с возможностью их как самостоятельного использования, так и в составе комплекса. Реализованы следующие процедуры и функции:

- функция построения базиса (7) по заданным матрицам (3);
- функция контроля соответствия матриц (3) требованиям алгебры Клиффорда (4);
- процедура ввода произвольной матрицы $A = \left\| a_{i,j} \right\|^8$ (рис. 1);
- функция построения матрицы (10);
- процедура расчета коэффициентов разложения;
- процедура вывода результатов (рис. 2).

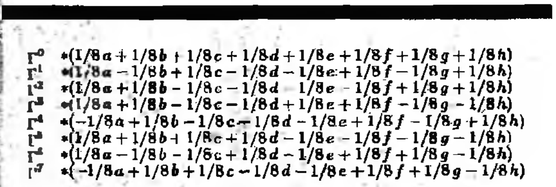
Разработанная программа отлаживалась и проходила опытную эксплуатацию на компьютерах со следующими параметрами: 1) AMD Athlon 64 3200+, 2 ГБ ОЗУ; 2) AMD Athlon 2500+, 256 МБ ОЗУ; 3) Intel Pentium(M) 4 1800, 512 МБ ОЗУ.

Полученные результаты являются основой для дальнейшей разработки алгоритмов и программных комплексов и решения прикладных задач электродинамики.



a	0	0	0	0	0	0	0
0	b	0	0	0	0	0	0
0	0	c	0	0	0	0	0
0	0	0	d	0	0	0	0
0	0	0	0	e	0	0	0
0	0	0	0	0	f	0	0
0	0	0	0	0	0	g	0
0	0	0	0	0	0	0	h

Рис. 1. **Окно ввода произвольной матрицы.**



```
Γ^0  *(1/8a + 1/8b + 1/8c + 1/8d + 1/8e + 1/8f + 1/8g + 1/8h)
Γ^1  *(1/8a - 1/8b + 1/8c - 1/8d - 1/8e + 1/8f - 1/8g + 1/8h)
Γ^2  *(1/8a + 1/8b - 1/8c - 1/8d - 1/8e - 1/8f + 1/8g + 1/8h)
Γ^3  *(1/8a + 1/8b - 1/8c - 1/8d + 1/8e + 1/8f - 1/8g - 1/8h)
Γ^4  *(-1/8a + 1/8b - 1/8c - 1/8d - 1/8e + 1/8f - 1/8g + 1/8h)
Γ^5  *(1/8a + 1/8b + 1/8c + 1/8d - 1/8e - 1/8f - 1/8g - 1/8h)
Γ^6  *(1/8a - 1/8b - 1/8c + 1/8d - 1/8e + 1/8f + 1/8g - 1/8h)
Γ^7  *(-1/8a + 1/8b + 1/8c - 1/8d - 1/8e + 1/8f + 1/8g - 1/8h)
```

Рис. 2. **Вывод результатов работы программы.**

5. Заключение.

Проведенные исследования позволили доказать две теоремы обеспечивающие алгоритм компьютерного решения задачи по разложению произвольной матрицы по матрицам Максвелла, что является первым необходимым этапом к применению метода разделения переменных для решения уравнений Максвелла. Адаптация метода разделения переменных для решения уравнений Максвелла открывает новые перспективы в области аналитических решений уравнений (2).

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Андрушкевич, И.Е.*** Алгебраический метод разделения переменных в системе уравнения Максвелла / И.Е. Андрушкевич // Международная алгебраическая конференция «Классы групп и алгебр: тезисы докладов, Гомель, 5–7 октября 2005 г. – Гомель, 2005. – С. 32–33.
2. ***Бёте, Г.*** Квантовая механика / Г. Бёте; пер. с англ.; под ред. ***В.Л. Бонч-Бруевича***. – М.: Мир, 1965. – 329 с.
3. ***Бёте, Г., Солпитер, Э.*** Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами / Г. Бёте, Э. Солпитер; пер. с англ. А.К. Бурцева; под ред. Я.А. Смородинского. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. – 562 с.
4. ***Андрушкевич, И.Е., Шишкин, Г.В.*** О критериях разделимости переменных в уравнении Дирака в гравитационных полях / И.Е. Андрушкевич, Г.В. Шишкин // Теоретическая и математическая физика. – 1987. – Т. 70. – № 2. – С. 289–302.
5. ***Матросов, А.*** Maple 6. Решение задач высшей математики и механики / А. Матросов. – СПб.: BHV, 2001. – 528 с.
6. ***Черняк, А., Черняк, Ж.*** Высшая математика на базе Mathcad. Общий курс / А. Черняк, Ж. Черняк. – СПб.: BHV, 2004. – 608 с.

7. ***Дьяконов, В.*** Mathematica 4.1/4.2/5.0 в математических и научно-тактических расчетах / В. Дьяконов. – М.: Солон, 2005. – 696 с.
8. ***Ануфриев, И.*** MATLAB 7.0 в подлиннике / И. Ануфриев, А. Смирнов, Е. Смирнова. – СПб.: BHV, 2005. – 780 с.
9. ***Кетков, Ю.Л.*** MATLAB 7: программирование, численные методы / Ю.Л. Кетков, А.Ю. Кетков, М.М. Шульц. – СПб.: BHV, 2005. – 752 с.

SUMMARY

The problem algorithm on the expansion of the arbitrary matrix (dimension 8 x 8) to Maxwell matrices is worked out on the basis of the proved theorems. The software implementation of the problem algorithm is accomplished. It allows to automatize the first necessary stage for the realization of the algebraic variable separation method as applied to Maxwell equations.

Поступила в редакцию 6.09.2006