

М.Н. Подоксенов

# Кривизна решений и $s$ -свойство обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

**§ 1. Постановка задачи. Основной результат.** Пусть  $(a, b)$  – интервал числовой прямой, где  $a$  может быть равно  $-\infty$ . Пусть  $V = (a, b) \times \mathbb{R}$  – область на плоскости с координатами  $(t, x)$ , и в этой области определена функция  $f(t, x)$ , имеющая непрерывные частные производные по обоим аргументам.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$x' = f(t, x). \quad (1)$$

Согласно теоремам существования и единственности решения [1], для каждой точки  $M \in V$  найдется решение  $x(t)$ , проходящее через эту точку. Будем говорить, что решение  $x(t)$  достигает точки  $N(b, x_0)$ , если  $\lim_{t \rightarrow b} x(t) = x_0$ . Гово-

рим, что уравнение (1) обладает  $s$ -свойством, если существует его решение, достигающее точки  $S(b, s)$ . Задача: найти необходимые и достаточные условия, при выполнении которых уравнение (1) будет обладать  $s$ -свойством для заданного числа  $s$ . Постановка этой задачи и терминология принадлежат О.В. Храмцову.

Некоторые результаты в этом направлении получены В.С. Ивановым [2].

В данной работе найдено достаточное условие, связанное с кривизной решений, при выполнении которого уравнение (1) будет обладать  $s$ -свойством.

Без ограничения общности можно считать, что  $(a, b) = (-\infty, 0)$ ; тогда  $V$  – это полуплоскость  $t < 0$ . Множество  $W \subset V$  назовем окрестностью точки  $S(0, s)$ , если существует такая окрестность  $U$  точки  $S$  на плоскости, что  $W = V \cap U$ .

Нетрудно доказать следующее предложение.

**Предложение.** Если функция  $f \in C^1(V)$  и  $f$  ограничена в некоторой окрестности точки  $S(0, s)$ , то уравнение (1) обладает  $s$ -свойством (при этом не предполагается существования предела  $\lim_{(t, x) \rightarrow (0, s)} f(t, x)$ ).

Поэтому представляет интерес только случай, когда  $f(t, x)$  не ограничена в любой окрестности точки  $S(0, s)$ . Существует множество примеров, когда в этом случае уравнение (1) обладает  $s$ -свойством и когда нет. При этом множество  $\mathcal{S} = \{s \in \mathbb{R} \mid \text{уравнение (1) обладает } s\text{-свойством}\}$  может быть пустым, совпадать со всей числовой прямой, состоять из одной точки, быть открытым или замкнутым промежутком. Некоторые примеры будут приведены в § 2.

Предположим, что уравнение (1) описывает физический процесс, а  $t$  представляет собой время. Тогда поставленную задачу можно сформулировать следующим образом. Можно ли так задать начальные условия  $x_0 = x(t_0)$  при некотором  $t_0 < 0$ , чтобы к моменту окончания процесса величина  $x(t)$  достигла заданного заранее значения  $s$ .

Любая физическая величина измеряется с определенной допустимой погрешностью. Поэтому задачу можно несколько изменить. Говорим, что уравнение (1) обладает асимптотическим  $s_0$ -свойством, если для каждого  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $s \in (s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon)$ , что это уравнение обладает  $s$ -свойством.

Каждое решение  $x(t)$  уравнения (1) определяет на полуплоскости  $V$  интегральную кривую. Обозначим  $k(t_0, x_0)$  – кривизну этой кривой в точке с координатами  $(t_0, x_0)$ ,  $x_0 = x(t_0)$ . Эту величину мы можем вычислить, не находя самого решения  $x(t)$ . Мы придадим кривизне знак, убрав модуль из числителя. Тем самым, на всем  $V$  определена функция

$$k(t, x) = \frac{f_1'(t, x) + f_1''(t, x) \cdot f(t, x)}{(1 + f^2(t, x))^{3/2}}.$$

**Теорема 1.** Пусть  $f \in C^1(V)$ . Предположим, что существует такая левая окрестность  $W$  точки  $S(0, s)$ , что для каждой точки  $(t, x) \in W$  выполнено  $|k(t, x)| > k_0 > 0$ . Тогда уравнение (1) обладает  $s$ -свойством.

**Следствие.** Если существует конечный предел  $\lim_{(t, x) \rightarrow (0, s)} k(t, x) = k_0 \neq 0$ , то уравнение (1) обладает  $s$ -свойством.

Пример 4 из § 2 показывает, что существования предела по одному направлению недостаточно, а пример 3 показывает, что множество  $\mathcal{S}$  может не быть замкнутым, и поэтому из наличия у уравнения асимптотического  $s$ -свойства автоматически не вытекает наличия у него  $s$ -свойства.

## § 2. Примеры.

**Пример 1.** Уравнение  $x' = |t|^{-1/2}$  имеет общее решение  $x(t) = -\sqrt{|t|} + C$ . Данное уравнение обладает  $s$ -свойством для любого  $s \in \mathbb{R}$ . Поведение интегральных кривых изображено на рис. 1.

**Пример 2.** Уравнение  $x' = \frac{x-a}{t^2}$ ,  $a = \text{const}$ , имеет общее решение  $x(t) = Ce^{1/|t|} + a$ . Существует только одно частное решение  $x(t) \equiv a$ , имеющее конечный предел при  $t \rightarrow 0$  (рис. 2).

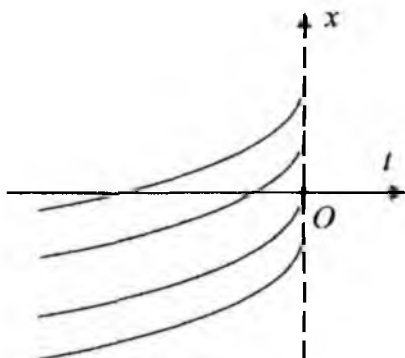


Рис. 1.

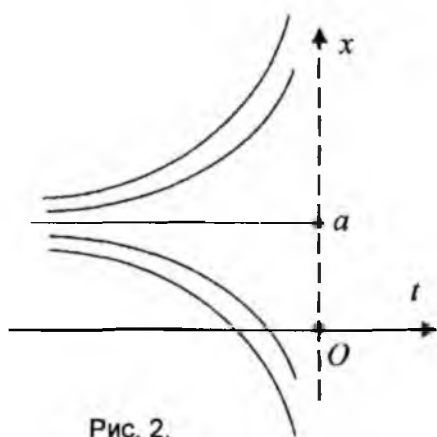


Рис. 2.

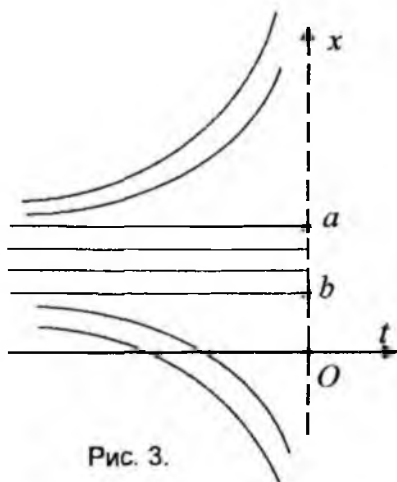


Рис. 3.

Модифицируем этот пример. Пусть

$$f(t, x) = \begin{cases} \frac{(x-a)^2}{t^2}, & x \in (-\infty, a), \\ 0, & x \in [a, b], \\ -\frac{(x-b)^2}{t^2}, & x \in (b, +\infty). \end{cases}$$

Тогда  $f(t, x)$  – дифференцируема по каждому аргументу, и для уравнения (1) выполнено  $\mathcal{S} = [a, b]$  (рис. 3).

Однако, хотелось бы построить аналогичный пример, для которого  $f(t, x)$  была бы не ограничена в окрестности любой точки на оси  $Ox$ .

Пусть  $U$  – это открытая полуполоса, которая определяется неравенством  $b < x < a$ . Пусть  $V_1$  есть открытый треугольник  $BFC$ ,  $V_2$  – открытый треугольник  $BGC$  (рис. 4). Обозначим  $W_3 = U \setminus \{V_1 \cup V_2\}$ . Пусть  $W_1$  есть открытый треугольник  $BEC$ .  $W_2$  – открытый треугольник  $AGC$ , а  $V_3$  – часть полуполосы  $U$ , лежащая вне замкнутых треугольников  $ADC$  и  $BEC$ .

Множества  $W_1, W_2, W_3$  образуют открытое покрытие множества  $U$ . Построим дифференцируемое разбиение единицы  $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ , подчиненное этому покрытию. Это означает, что

$\omega_1(t, x) + \omega_2(t, x) + \omega_3(t, x) \equiv 1$ ,  
 $\omega_i(t, x) \geq 0$  на  $U$  и  $\omega_i(t, x) \equiv 0$  вне  $W_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . По поводу существования такого разбиения единицы см. [2, с. 289]. Получается, что на  $V_i$  выполнено  $\omega_i(t, x) \equiv 1$ ,  $\omega_j(t, x) \equiv 0$ ,  $j \neq i$ .

Определим на  $U$  три дифференцируемые функции

$$g_1(t, x) = -|t|^{-1/2}, \quad g_2(t, x) = |t|^{-1/2}, \quad g_3(t, x) \equiv 0.$$

«Склеим» их с помощью нашего разбиения единицы:

$$f_1(t, x) = \omega_1(t, x) \cdot g_1(t, x) + \omega_2(t, x) \cdot g_2(t, x) + \omega_3(t, x) \cdot g_3(t, x).$$

Получим новую дифференцируемую функцию, которая совпадает с  $g_1$  на  $V_1$  и совпадает с  $g_2$  на  $V_2$ , а на множестве  $V_3$  она тождественно равна единице.

Определим теперь

$$f(t, x) = \begin{cases} \frac{(x-a)^2}{t^2}, & x \in (-\infty, a], \\ f_1(t, x), & x \in (a, b), \\ -\frac{(x-b)^2}{t^2}, & x \in [b, +\infty). \end{cases} \quad (2)$$

Это дифференцируемая функция. Поведение интегральных кривых уравнения (1) с правой частью (2) вне полуполосы  $U$  изображено на рис. 2. На рис. 5 изображено поведение интегральных кривых в области  $U$  вместе с границей.

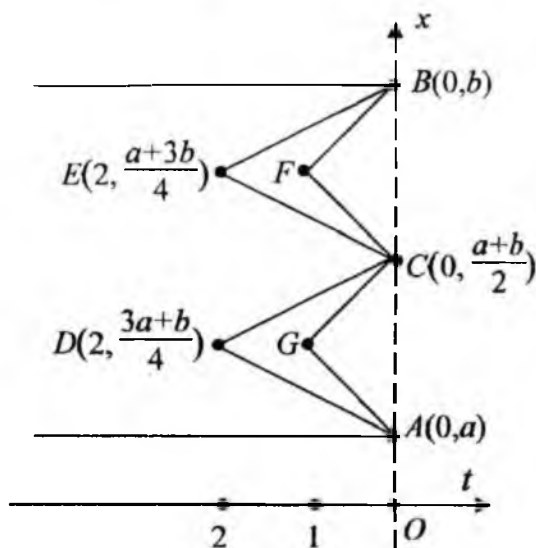


Рис. 4.

Любая интегральная кривая, попадающая в область  $V_1$  или  $V_2$ , достигает некоторой точки на оси  $Ox$ . Сколь угодно близко от точек  $A$  или  $B$  есть точки этих областей. С учетом примера 1 можно сделать вывод: для сколь угодно близких к  $A$  или  $B$  точек на  $Ox$  найдутся решения, достигающие этих точек.

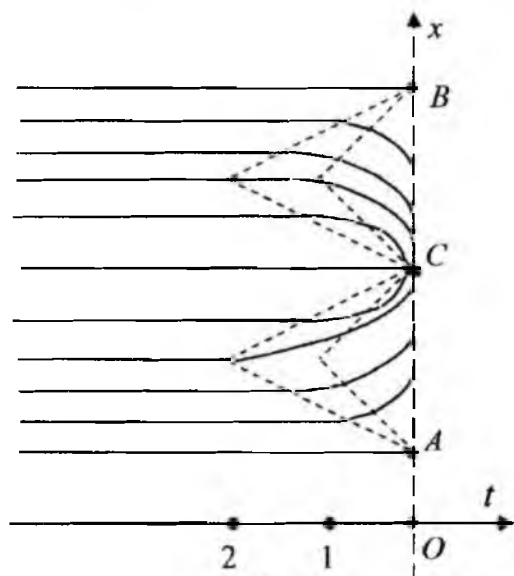


Рис. 5.

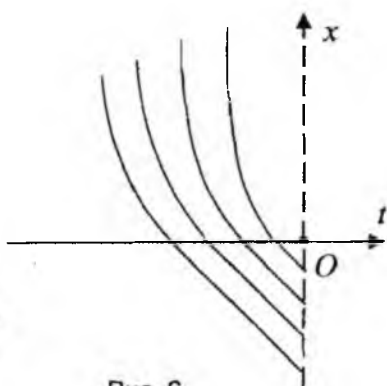


Рис. 6.

**Пример 3.** Данный пример был предложен В.С. Ивановым [1]. Пусть

$$f(t, x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{t^2} - 1, & x \geq 0, \\ -1, & x \leq 0. \end{cases} \quad (3)$$

Это гладкая функция. Поведение интегральных кривых уравнения (1) с правой частью (3) изображено на рис. 6. В данном случае  $\mathcal{S} = (-\infty, 0)$ .

Модифицируем данный пример.

Пусть

$$f(t, x) = \begin{cases} -\frac{(x-1)^2}{t^2} - 1, & x \geq 1, \\ -\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right), & -1 \leq x \leq 1, \\ \frac{(x+1)^2}{t^2} + 1, & x \leq -1. \end{cases} \quad (4)$$

Это гладкая функция. Поведение интегральных кривых уравнения (1) с правой частью (4) изображено на рис. 7. В данном случае  $\mathcal{S} = (-1, 1)$ .

Дословно так же, как и в примере 2, мы можем с помощью разбиения единицы добиться, чтобы стала неограниченной в окрестности любой точки на оси  $Ox$ .

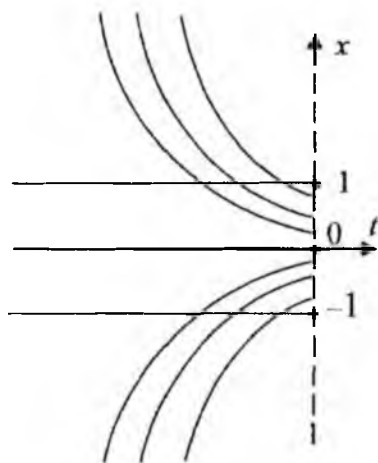


Рис. 7.

**Пример 4.** Пусть  $V_1=\{(t, x) \mid t < 0, x \geq |t|\}$ ,  $V_2=\{(t, x) \mid t < 0, |x| \leq |t|\}$ ,  $V_3=\{(t, x) \mid t < 0, x \leq -t\}$ . Определим

$$f(t, x) = \begin{cases} |t|^{-1/2}, & (t, x) \in V_2, \\ \frac{\sqrt{|x|}}{|t|}, & (t, x) \in V_1 \cup V_3. \end{cases} \quad (5)$$

Заметим, что функция  $f$  является непрерывной, но не является гладкой. Решение уравнения (1) с правой частью (5) имеет вид

$$\text{на } V_1: x = \frac{1}{4} \ln^2 Ct; \quad \text{на } V_2: x = -2\sqrt{|t|} + C; \quad \text{на } V_3: x = -\frac{1}{4} \ln^2 Ct.$$

Примерное поведение интегральных кривых показано на рис. 8.

Во множестве  $V_2$  интегральная кривая представляет собой участок параболы. Рано или поздно эта кривая попадает в  $V_1$  и при  $t \rightarrow 0$  она уходит на  $+\infty$ . Казалось бы, решение в  $V_3$  должно при  $t \rightarrow 0$  уходить на  $-\infty$ , но постоянная  $C$ , определяемая начальной точкой из  $V_3$ , такова, что интегральная кривая раньше попадает в  $V_2$ , а там уже правая часть уравнения имеет другой вид.

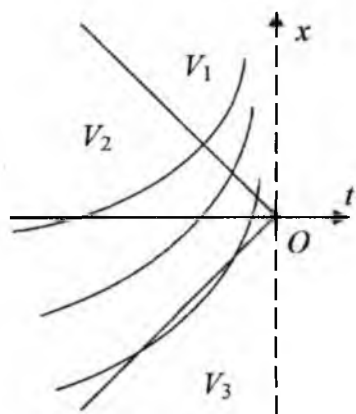


Рис. 8.

$$\text{Вычислим } k(t, 0) = \frac{1}{2(|t| + 1)^{3/2}}, \quad \lim_{t \rightarrow 0} k(t, 0) = \frac{1}{2}.$$

Тем не менее, уравнение (1) с правой частью (2) 0-свойством не обладает. Любое решение при  $t \rightarrow 0$  уходит на  $+\infty$ . Однако, необходимо еще модифицировать этот пример, сделав функцию  $f$  гладкой.

**Пример 4'.** Определим (рис. 9)

$$V'_1 = \{(t, x) \mid t < 0, x > 1, 1|t|\},$$

$$V'_2 = \{(t, x) \mid t < 0, |x| < 0,9|t|\},$$

$$V'_3 = \{(t, x) \mid t < 0, x < -1, 1|t|\},$$

$$V'_4 = \{(t, x) \mid t < 0, 0,9|t| < x < 1, 1|t|\},$$

$$V'_5 = \{(t, x) \mid t < 0, -1, 1|t| < x < -0,9|t|\}.$$

Далее, рассмотрим области

$$U_1 = V'_1 \cup V'_4, \quad U_2 = V'_2 \cup V'_4 \cup V'_5, \quad U_3 = V'_3 \cup V'_5.$$

Они образуют открытое покрытие области  $V$ .

Построим гладкое класса  $C^\infty$  разбиение единицы  $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ , подчиненное этому покрытию.

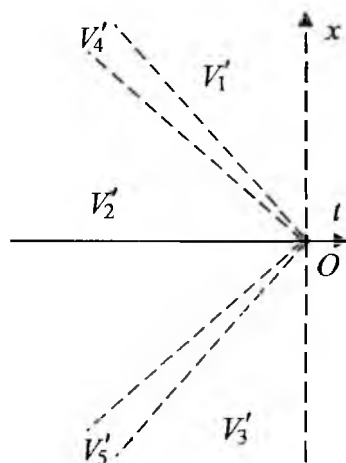


Рис. 9.

Определим

$$g_1(t, x) = g_3(t, x) = \frac{\sqrt{|x|}}{|t|}, \quad g_2(t, x) = |t|^{-1/2}$$

для всех  $(t, x) \in V$ ;

$$f(t, x) = \omega_1(t, x) \cdot g_1(t, x) + \omega_2(t, x) \cdot g_2(t, x) + \omega_3(t, x) \cdot g_3(t, x). \quad (6)$$

Это гладкая функция, т.к. все слагаемые в правой части равенства — гладкие функции. Гладкость нарушается только у функций  $g_1$  и  $g_3$  при  $x=0$ , но весь луч  $x=0$  лежит в области  $V'_2$ , где  $\omega_1 = \omega_3 = 0$ .

Рассмотрим решение уравнения (1) с правой частью (6). Пусть

$$W = \{(t, x) \mid -\frac{1}{2} < t < 0\}.$$

Если интегральная кривая попадает в  $V'_3 \cap W$ , то решение совпадает с решением из примера 4, а значит, интегральная кривая обязательно перейдет в область  $V'_5 \cap W$ . Но, если  $(t, x) \in V'_5 \cap W$ , то  $g_3(t, x) > 1,3$  и  $g_2(t, x) > 1,3$ . Следовательно и  $f(t, x) > 1,3$ . Поэтому наше решение будет возрастать быстрее, чем  $1,3t + c_0$ , а значит интегральная кривая обязательно перейдет в область  $V'_2 \cap W$ , а оттуда —  $V'_4 \cap W$ . Также легко убедиться, что в этой области  $f(t, x) > 1,3$ , а значит, интегральная кривая перейдет в область  $V'_1$ , где решение будет совпадать с решением из примера 4. Итак, в данном примере любое решение уходит на  $+\infty$  при  $t \rightarrow 0$ . При этом в области  $V'_2$  функция (6) совпадает с функцией (5), и поэтому соответствующая функция  $k(t, 0)$  совпадает с функцией из примера 4.

**Пример 5.** Данный пример показывает, что условие теоремы не является необходимым.

$$x' = |t|^{-2/3}, \quad x(t) = |t|^{1/3} + C.$$

$$k(t, x) = \frac{2|t|^{-5/3}}{3(1 + t^{-4/3})^{3/2}} \rightarrow 0$$

при  $t \rightarrow 0$ . Тем не менее, уравнение обладает  $s$ -свойством для любого  $s \in \mathbb{R}$ .

**§ 3. Доказательство.** Для доказательства теоремы нам понадобится следующее утверждение, которое не требует доказательства.

**Лемма.** Пусть функция  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  дважды дифференцируема и  $f''(t) > 0$  (или  $f''(t) < 0$ ) для каждого  $t \in (a, b)$ . Тогда существует конечный или бесконечный предел  $\lim_{t \rightarrow b} f(t)$ .

**Доказательство теоремы 1.** Докажем сначала, что уравнение (1) обладает асимптотическим  $s$ -свойством.

Пусть  $W$  — левая окрестность точки  $S(0, s)$  такая, что для каждой точки  $(t, x) \in W$  выполнено  $|k(t, x)| > k_0$ . Предположим сначала, что  $k(t, x) > 0$ .

Предположим, что существует такое  $\varepsilon > 0$ , что ни одно решение не достигает точки на оси  $Ox$ , с координатой  $x \in (s - \varepsilon, s + \varepsilon)$ . Пусть  $\delta$  таково, что открытый полукруг  $B(S, \delta) \cap V$  содержится в  $W$ . Дополним его

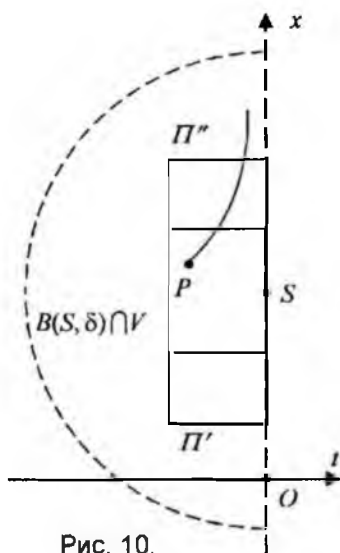


Рис. 10.

частью границы, лежащей на оси  $Ox$ , и получившееся множество обозначим  $\bar{B}$ . Впишем в  $\bar{B}$  замкнутый прямоугольник  $\Pi$ , одна из сторон которого представляет собой отрезок  $[s - 2\varepsilon_1, s + 2\varepsilon_1]$ , лежащий на оси  $Ox$ , и  $2\varepsilon_1 < \varepsilon$ . Пусть  $\Pi'$  и  $\Pi''$  — его стороны, параллельные  $Ot$ , а  $\omega$  — их длина (рис. 10). Затем построим прямоугольник  $\Pi_1$  со стороной  $[s - \varepsilon_1, s + \varepsilon_1]$ , лежащей на оси  $Ox$ , так чтобы его стороны  $\Pi'_1$  и  $\Pi''_1$  параллельные  $Ot$  имели ту же длину  $\omega$ .

Пусть  $\alpha_0 = \frac{\pi}{2} - k_0\varepsilon_1$ , а  $N = \operatorname{tg} \alpha_0$  (предполагается, что  $\varepsilon_1$  достаточно мало, и  $\alpha_0 > 0$ ). Пусть  $f(t, x)$  неограничена в любой окрестности точки  $S$  сверху. Тогда внутри  $\Pi_1$  можно найти точку  $P(t, x)$ , в которой  $f(t, x) > N$ . Пусть  $x_0(t)$  — интегральная кривая, которая проходит через  $P$ . Знак  $x_0''(t) = f'(t, x_0(t))$  совпадает со знаком  $k(t, x_0(t))$ . Значит  $x_0''(t) > 0$  в пределах  $W$  и, если это решение не приходит ни в одну точку отрезка  $[s - 2\varepsilon_1, s + 2\varepsilon_1]$  оси  $Ox$ , то оно должно пересечь одну из сторон  $\Pi'$  или  $\Pi''$ .

Вспомним геометрический смысл понятия «кривизна кривой». Это скорость поворота касательной. До пересечения с границей прямоугольника длина пути  $x_0(t)$  будет строго больше  $\varepsilon_1$ . Значит, касательная повернется на угол больше, чем  $\beta_0 = k_0\varepsilon_1$ . Тогда на выходе из прямоугольника угол наклона касательной будет больше, чем  $\alpha_0 + \beta_0 = \pi/2$ , что невозможно.

Пусть теперь в  $\Pi_1$  не найдется такой точки  $P(t, x)$ , что  $f(t, x) > N$ . Выберем  $\omega_1 < \varepsilon_1/N$ . Тогда  $\varepsilon_1/\omega_1 > N$ . Пусть  $\omega_2 = \varepsilon_1 \cdot \operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2} - k_0\varepsilon_1)$ .

При построении  $\Pi$  и  $\Pi_1$  добавим еще требование: стороны параллельные  $Ot$  должны иметь длину  $\omega_0 < \min\{\omega_1, \omega_2\}$ . Пусть  $Q(\omega_0, s)$ , а  $R$  — верхний правый угол  $\Pi_1$ . Тогда отрезок  $QR$  будет лежать на прямой  $l$  с угловым коэффициентом большим  $N$ . Пусть  $x_1(t)$  — решение, которое проходит через  $Q$ . Согласно нашим предположениям,  $x_1(t)$  не может пересечь отрезок  $QR$ , а значит,  $x_1(t)$  должно пересечь  $\Pi'$ . Пусть  $K$  — точка пересечения, а  $L$  — левый нижний угол прямоугольника  $\Pi$  (рис. 11). Поскольку  $k(t, x) > 0$ , то  $f'(t, x_1(t)) > 0$  и функция  $f(t, x)$  вдоль пути  $x_1(t)$  возрастает. А так как  $K$  лежит

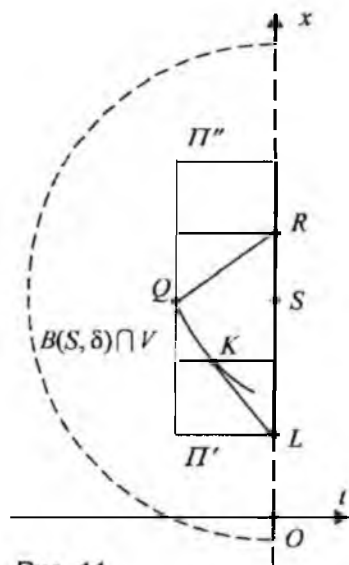


Рис. 11.

ниже  $Q$ , имеем  $f(t, x_1(t)) < 0$  вдоль дуги  $QK$ . При этом длина пути  $x_1(t)$  от  $Q$  до  $K$  составит больше, чем  $\varepsilon_1$  и касательная к пути совершит поворот на угол больший, чем  $\beta = k_0\varepsilon_1$ . Значит, угловой коэффициент касательной к пути  $x_1(t)$  в точке  $K$  будет больше, чем  $\operatorname{tg}(-\frac{\pi}{2} + k_0\varepsilon_1)$ . Отрезок  $KL$  лежит на прямой с угловым коэффициентом меньше, чем  $-N$  и меньше, чем

$$-\frac{\varepsilon_1}{\omega_2} = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - k_0\varepsilon_1\right) = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{2} + k_0\varepsilon_1\right).$$

Следовательно  $x_1(t)$  после точки  $K$  будет проходить выше отрезка  $KL$ ; при этом  $f(t, x_1(t))$  продолжит возрастать. Значит  $x_1(t)$  не сможет пересечь  $KL$ . Это противоречит тому, что  $x_1(t)$  должно пересечь  $\Pi'$ .

Полученное противоречие доказывает, что ложным было наше предположение: существует такое  $\varepsilon > 0$ , что ни одно решение не достигает точки на оси  $Ox$  с координатой  $x \in (s - \varepsilon, s + \varepsilon)$ . Это означает, что уравнение (1) обладает асимптотическим  $s$ -свойством.

Случай  $k_0 < 0$  рассматривается аналогично.

Пусть  $N$  – часть границы полукруга  $\bar{B}$ , лежащая на оси  $Ox$ , а  $N_0$  – ее внутренность, как у множества на прямой. Пусть  $M$  – любая окрестность точки  $s$  на  $Ox$ , содержащаяся в  $N_0$  вместе со своим замыканием. Тогда каждая точка  $S_0(0, s_0) \in M$  удовлетворяет условию теоремы. Это означает, что множество  $\mathcal{S}$  всюду плотно в  $M$ .

Выберем произвольные точки  $S_1(0, s_1)$ ,  $S_2(0, s_2) \in \mathcal{S} \cap M$  так, чтобы  $s_1 < s < s_2$ . Пусть  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  – решения уравнения (1), для которых  $s_1$  и  $s_2$  являются предельными точками. Пусть  $t_1$  и  $t_2$  принадлежат областям определения решений  $x_1$  и  $x_2$ , а  $t_0 = \min\{t_1, t_2\}$ .

Пусть  $T$  – замкнутая криволинейная трапеция, ограниченная осью  $Ox$ , кривыми  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  и прямой  $t = t_0$  (рис. 12). Обозначим  $T_0$  – ее основание, лежащее на прямой  $t = t_0$ . Пусть  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$  – последовательность положительных чисел, сходящаяся к нулю, а  $x_i(t)$  – такое решение, что  $\bar{x}_i = \lim_{t \rightarrow 0} x_i(t) \in (s - \varepsilon_i, s + \varepsilon_i)$ . Получаем последовательность чисел  $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots\} \subset \mathcal{S}$ , сходящуюся к  $s$ .

Множество  $T$  компактно. Согласно следствию 7 [1, с. 82], любое решение  $x_i(t)$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$  можно продолжить назад до границы множества  $T$ . Но эти решения не могут пересечь боковые стороны. Поэтому они пересекут основание  $T_0$ . Обозначим  $x_i^0 = x_i(t_0)$ ,  $D_i(t_0, x_i^0)$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$ . Множество  $T'$  компактно. Следовательно, из последовательности точек  $D_1, D_2, D_3, \dots$  можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Не ограничивая общности можем считать, что сама последовательность  $D_1, D_2, D_3, \dots$  сходится к точке  $D_0(t_0, x_0)$ .

Рассмотрим решение  $x_0(t)$  уравнения (1), проходящее через точку  $D_0$ . Предположим, что это решение не достигает точки  $S$ . Тогда найдется такое  $\varepsilon'$ , что в открытом полукруге  $B_1 = V \cap B(S, \varepsilon')$  нет точек этого решения. Дополним  $B_1$  частью его границы, лежащей на оси  $Ox$  и получившееся множество обозначим  $\bar{B}_1$ . Впишем в  $\bar{B}_1$  новую замкнутую трапецию  $T'$  по описанному выше правилу. Пусть длина ее основания, лежащего на  $Ox$ , равна  $2\varepsilon''$ , а другое основание обозначим  $T'_0$ . Пусть число  $N$  таково, что  $\bar{x}_i \in (s - \varepsilon'', s + \varepsilon'')$  для каждого  $i > N$ . Тогда каждое из решений  $x_i(t)$ ,  $i = N+1, N+2, \dots$  пересечет основание  $T'_0$ . Пусть оно лежит на прямой  $t = t'$ . Множество  $T'_0$  компактно. Поэтому последовательность точек  $E_i(t', x_i(t'))$ ,  $i = N+1, N+2, \dots$  сходится к некоторой точке  $E_0 \in T'_0$ . В силу следствия 5 [3]  $E_0(t', x_0(t'))$  – точка на решении  $x_0(t)$ . Получаем, что  $E_0 \in B(S, \varepsilon')$ . Противоречие.

Теорема доказана.

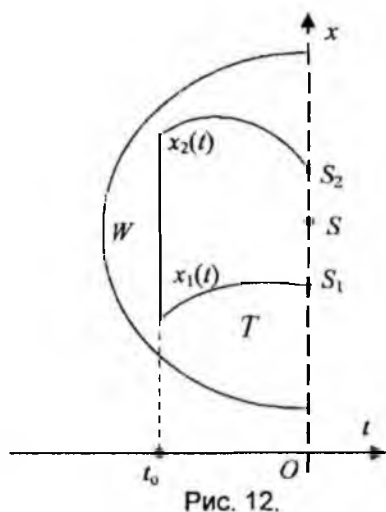


Рис. 12.

**Приложение.** Проиллюстрируем применение теоремы. Рассмотрим уравнение

$$x' = \frac{\cos^a x}{\sqrt{-t}} + \sqrt{x}, \quad t < 0, x > 0, a > 1.$$

Непосредственным вычислением находим

$$k(t, x) = \frac{(-t)^{3/2} + 2at\sqrt{x} \cos^a x \sin x + \sqrt{x} \cos^a x}{2\sqrt{x}(-t + \cos^{2a} x - tx + 2\sqrt{-t}\sqrt{x} \cos^a x)^{3/2}}.$$

Если  $\cos x \neq 0$ , то существует предел

$$\lim_{(t, x) \rightarrow (0, s)} k(t, x) = \frac{1}{\cos^a x} \neq 0.$$

Следовательно, множество  $\mathcal{S}$  содержит все точки  $x > 0$ , для которых  $\cos x \neq 0$ . Рассуждения, использованные в конце доказательства теоремы, показывают, что множество  $\mathbb{R} \setminus \mathcal{S}$  не может содержать изолированных точек. Следовательно,  $\mathcal{S} = (0, +\infty)$ .

Автор благодарит О.В. Храмцова за полезное обсуждение.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Арнольд В.И.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М., 1984. – С. 76.
2. **Иванов В.С.** Об асимптотике решений квазилинейного неоднородного дифференциального уравнения // Итоги НИР – 2002. VII (52) научная конференция студентов, магистрантов и аспирантов. Сборник статей. – Витебск, 2003. – С. 216–219.
3. **Громол Д., Клинггенберг В., Мейер В.** Риманова геометрия в целом. – М., 1971. – С. 79.

## SUMMARY

*The ordinary differential equation  $x' = f(t, x)$  is considered in the half-plane  $t < 0$ . We set the question: if there is a solution  $x(t)$ , that has the limit point  $(0, s)$  for the given  $s = \text{const}$ . The sufficient condition connected with the curvature function  $k(t, x)$  is found.*