```
            chart1.Series[0].Points.DataBindXY(x, y);      }
```

Во втором случае имеем один вещественный корень кратности 2 и, следовательно, импульсная характеристика первого порядка вычисляется по формуле (3). Реализация данного случая представлена следующей функцией.

```
private void ravno(double x1)
      {    List<double> x = new List<double>(), y = new List<double>();
         dataGridView1.ColumnCount = 2;
         dataGridView1.RowCount = 21;  int rowIndex = 0;
         for(double t = 0; t <= 1.0001; t = t + 0.05)
         {   double b = (1 + t) * Math.Exp(x1 * t);
            dataGridView1[0, rowIndex].Value = t;
            dataGridView1[1, rowIndex].Value = Math.Round(b, 4);
            x.Add(t);   y.Add(b); rowIndex++; }
         chart1.Series[0].Points.DataBindXY(x, y);       }
```

В третьем случае имеем комплексно-сопряженные корни и, следовательно, импульсная характеристика первого порядка вычисляется по формуле (4). Реализация данного случая представлена следующей функцией.

```
private void menshe(Complex x1, Complex x2)
      {   List<double> x = new List<double>(), y = new List<double>();
         dataGridView1.ColumnCount = 2;
         dataGridView1.RowCount = 21;
         int rowIndex = 0;
         for (double t = 0; t <= 1.0001; t = t + 0.05)
         { double B = Math.Exp(x1.Real * t) * Math.Sin(x1.Imaginary * t);
            dataGridView1[0, rowIndex].Value = t;
            dataGridView1[1, rowIndex].Value = Math.Round(B, 4);
            x.Add(t);   y.Add(B);  rowIndex++;}
         chart1.Series[0].Points.DataBindXY(x, y);  }
```

Заключение. Таким образом, реализованная программа позволяет построить импульсные характеристики первого порядка асимптотически обратного эволюционного оператора для дифференциальных уравнений вида (1).

Список литературы

1. Вувуникян, Ю.М. Обобщенные функции и нелинейные эволюционные операторы: монография / Ю.М. Вувуникян, Д.С. Шпак. – Гродно: ГрГУ, 2015.– 288 с.

ФУНКЦИИ ОТ МАТРИЦ

К.Л. Якуто
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

Известно, что математика и другие науки в процессе моделирования оперируют многомерными величинами. Подобного рода информацию удобно представлять в виде матриц, которые являются основным математическим аппаратом линейной алгебры и применяются во многих приложениях современной математики.

Цель работы – исследовать способы нахождения функций от аргументов, представимых в виде матриц.

Материал и методы. Рассмотрим квадратную матрицу A порядка n с элементами из C и комплекснозначную функцию f(λ) скалярного аргумента $\lambda\in C$. Требуется определить, что следует понимать под f(A). Предположим, что матрица $A\in M_n(C)$ имеет различные характеристические числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_s$, которые являются корнями минимального многочлена ψ(λ) матрицы A с кратностями $m_1, m_2, \ldots m_s$, т.е. $\psi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}\cdot(\lambda - \lambda_2)^{m_2}\cdot\ldots\cdot(\lambda - \lambda_s)^{m_s}$. Степень этого многочлена $m = \sum_{k=0}^{s} m_k$.

Для функции f(λ) общего вида чисел $f(\lambda_k)$ называются её значениями на спектре матрицы A. Значения многочлена g(λ) на спектре матрицы A вполне определяют матрицу g(A); все многочлены, принимающие одни и те же значения на спектре матрицы А, имеют одно и то же матричное значение g(A). Это свойство многочленов используется для определения f(A) в общем случае: значение функции f(λ) на спектре матрицы А должны полностью определять матрицу А. Если функция f(λ) определена на спектре матрицы А, то f(A) = g(A), где g(λ) – любой многочлен, принимающий на спектре матрицы А те же значения, что и f(λ). Данное определение принимается за определение функции от матрицы [1].

Среди всех многочленов с комплексными коэффициентами, принимающих те же значения на спектре матрицы А, что и f(λ), существует только один многочлен степени меньше m. Многочлен r(λ) называют интерполяционным многочленом Лагранжа-Сильвестра для функции f(λ) на спектре матрицы А. Представим правильно-дробную функцию $r(\lambda)/\psi(\lambda)$ в виде суммы простых дробей $\frac{r(\lambda)}{\psi(\lambda)} = \sum_{k=1}^{s}\left[\left(\frac{\alpha_{k1}}{(\lambda-\lambda_k)^{m_k}}\right)+\left(\frac{\alpha_{k2}}{(\lambda-\lambda_k)^{m_k-1}}\right)+\dots+\left(\frac{\alpha_{k,m_k}}{\lambda-\lambda_k}\right)\right]$, где α_{kj} (k = 1, 2, …, s; j = 1, 2, … m_k) – некоторые числа, которые определяются следующим образом: $\alpha_{kj}=\frac{1}{(j-1)!}\left[\frac{f(\lambda)}{\psi^k(\lambda)}\right]$.

Результаты и их обсуждение. Постановка задачи: найти матричную функцию e^{At}, где $A = \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$. Решив соответствующее характеристическое уравнение, получим собственные значения $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$. Найдём интерполяционные полиномы, в которых в качестве узлов интерполяции берутся собственные значения. Степень полинома должна быть на единицу меньше, чем размер матрицы. В результате получаем систему уравнений:

$$\begin{cases}a\lambda_1^2+b\lambda_1+c=e^{\lambda_1 t}\\a\lambda_2^2+b\lambda_2+c=e^{\lambda_2 t}\\a\lambda_3^2+b\lambda_3+c=e^{\lambda_3 t}\end{cases}$$

где в правой части находится скалярная функция. Подставив вместо λ_1, λ_2, λ_3 их значения и решив получившуюся систему, получим, что c = 1, $b = 2e^t + \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{3}{2}$, $a = \frac{1}{2}e^t - e^t + \frac{1}{2}$.

Тогда $e^{At} = cI + bA + cA^2 = c\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix} + a\begin{pmatrix}2&0&2\\0&1&0\\2&0&2\end{pmatrix}$. Выполнив соответствующие преобразования, получим матрицу для e^{At}

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}e^{2t}+\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}e^{2t}-\frac{1}{2}\\0&e^t&0\\\frac{1}{2}e^{2t}-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}e^{2t}+\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Постановка задачи: для матрицы А размером 2×2 найти матрицу В, такую что $B^2 = A$ и определить количество матриц, удовлетворяющих поставленному условию. Пусть $A = \begin{pmatrix}2&1\\1&3\end{pmatrix}$. Собственными значениями для данной матрицы будут иметь вид: λ_1 = , λ_2 = . В результате получим четыре системы из двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases}a_0+a_1\left(\frac{5+\sqrt5}{2}\right)=\sqrt{\frac{5+\sqrt5}{2}}\\a_0+a_1\left(\frac{5-\sqrt5}{2}\right)=\sqrt{\frac{5-\sqrt5}{2}}\end{cases}\qquad\begin{cases}a_0+a_1\left(\frac{5+\sqrt5}{2}\right)=\sqrt{\frac{5+\sqrt5}{2}}\\a_0+a_1\left(\frac{5-\sqrt5}{2}\right)=\sqrt{\frac{5-\sqrt5}{2}}\end{cases}\qquad\begin{cases}a_0+a_1\left(\frac{5+\sqrt5}{2}\right)=\sqrt{\frac{5+\sqrt5}{2}}\\a_0+a_1\left(\frac{5-\sqrt5}{2}\right)=-\sqrt{\frac{5-\sqrt5}{2}}\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_0+a_1\left(\frac{5+\sqrt5}{2}\right)=\sqrt{\frac{5+\sqrt5}{2}}\\a_0+a_1\left(\frac{5-\sqrt5}{2}\right)=\sqrt{\frac{5-\sqrt5}{2}}\end{cases}$$

Рассуждая как в предыдущем случае, получим четыре матрицы, квадраты которых представляют собой исходную матрицу

$$\begin{pmatrix}1{,}38&0{,}32\\0{,}32&1{,}70\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1{,}38&-0{,}32\\-0{,}32&-1{,}70\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-0{,}32&1{,}38\\1{,}38&1{,}05\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0{,}32&-1{,}38\\-1{,}38&-1{,}05\end{pmatrix}$$

Постановка задачи: найти sin A для $A = \begin{pmatrix}\pi&0&0\\0&\frac{\pi}{2}&\frac{\pi}{2}\\0&0&\frac{\pi}{2}\end{pmatrix}$.

Имеем $\psi(\lambda) = (\lambda - \pi)\cdot\left(\lambda - \frac{\pi}{2}\right)^2$, $s = 2$, $\lambda_1 = \pi$, $\lambda_2 = \pi/2$, $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, $\psi^1 = (\lambda - \frac{\pi}{2})^2$, $\psi^2 = (\lambda - \pi)$, откуда $r(\lambda) = a_{11}\psi^1(\lambda) + [a_{21} + a_{22}(\lambda - \lambda_2)]\psi^2$

Коэффициенты $\alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{22}$ имеют следующий вид:

$$\alpha_{11} = \frac{f(\pi)}{\frac{\pi^2}{4}},\quad \alpha_{21} = -\frac{f(\pi)}{\frac{\pi}{2}},\quad \alpha_{22} = -\frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{\pi^2}{4}} - \frac{f'\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{\pi}{2}}.$$

Для функции $f(\lambda) = \sin(\lambda)$ $\alpha_{11} = 0, \alpha_{21} =$ $-2/\pi$, $\alpha_{22} =$ $-4/\pi^2$, откуда

$$r(\lambda) = \left[-\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi^2}\left(\lambda - \frac{\pi}{2}\right)\right](\lambda - \pi)$$

и, следовательно,

$$\sin A = r(A) = \left[-\frac{2}{\pi}\mathbf{E} - \frac{4}{\pi^2}\left(\mathbf{A} - \frac{\pi}{2}E\right)\right](\mathbf{A} - \pi\mathbf{E}) =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{4}{\pi} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{\pi} & -\frac{2}{\pi} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{\pi} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение системы линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами сводится к нахождению экспоненты e^{At}, где A – матрица коэффициентов системы. Формула Лагранжа позволяет через экспоненту e^{At} матрицы A выразить и решение задачи Коши для неоднородной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Заключение. В работе дано определение функции от матрицы; рассмотрены способы её нахождения; приведены примеры, в которых в качестве функций выступают экспонента, квадратный корень из матрицы, синус матрицы; обоснована необходимость нахождения функций от матричных аргументов для решения систем линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Список литературы

1. Забрейко, П.П. Функции от матриц и коммутативные матричные подалгебры / П.П. Забрейко, А.Н. Таныгина. – Минск: БГУ, 2011. – 95 с.