– значение рассматриваемого октета в широковещательном адресе сети записано в нижнем правом углу;
– число В, используемое при вычислении длины маски, стоит перед точкой с запятой;
– значение рассматриваемого октета в последнем допустимом адресе узла данной сети записано левее числа В;
– количество бит маски со значением 1 в соответствующем октете вычисляется как 8–А+В.

Заключение. Разработанный подход к освоению и закреплению материала по разделению сети на подсети позволяет увеличить наглядность процесса расчёта подсетей, а также обеспечить большую доступность для студентов с недостаточным уровнем математической подготовки или затруднениями при работе с абстрактными понятиями.

Список литературы

1. Образовательный стандарт Республики Беларусь. Высшее образование. Первая ступень. Специальность 1-31 03 03 Прикладная математика (по направлениям): ОСВО 1-31 03 03-2013. Введ. – 01.09.2013. – Минск: Министерство образования Республики Беларусь: РИВШ, 2013. – III, 32 с.
2. Образовательный стандарт высшего образования. Высшее образование. Первая ступень. Специальность 1-31 03 07 Прикладная информатика (по направлениям): ОСВО 1-31 03 07-2013. Введ. – 01.09.2013. – Минск: Министерство образования Республики Беларусь: РИВШ, 2013. – III, 45 с.

О ПРИБЛИЖЕННОМ МЕТОДЕ НАХОЖДЕНИЯ КВАДРАТНЫХ КОРНЕЙ ИЗ МАТРИЦ

Ю.В. Трубников, О.В. Пышненко
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

В настоящее время существующие методы решения нелинейных матричных уравнений очень громоздки и могут быть применены к ограниченным классам уравнений. Поэтому, в настоящей работе была поставлена цель – разработать эффективный приближенный метод нахождения квадратных корней из матриц.

Материал и методы. Материал исследования: нелинейные матричные уравнения, итерационный процесс Ньютона-Канторовича.

Методы исследования: аналитические и численные с использованием пакета символьной математики *Maple* 15.

Результаты и их обсуждение. Нахождение всех квадратных корней из матрицы B размерности $[n\times n]$ эквивалентно решению нелинейного матричного уравнения

$$X^2 = B. \tag{1}$$

Как известно, метод Ньютона-Канторовича [1, с. 679] решения операторного уравнения $F(x)=0$ в банаховом пространстве состоит в построении последовательности

$$x_{n+1} = x_n - \left[F'(x_n)\right]^{-1} F(x_n)\ \ (n=1,2,...). \tag{2}$$

Для уравнения (1) некоторую трудность представляет нахождение оператора $\left[F'(x)\right]^{-1}$.

Пусть $F(X)=X^2-B,$ тогда $F(X+H)-F(X)=XH+HX+H^2,$ следовательно

$$F'(X)H = XH+HX \tag{3}$$

и, таким образом,

$$\left[F'(X)\right]^{-1} F(X)=H. \tag{4}$$

Равенство (4) означает, что мы должны получить следующее представление для $F(X)$: представить $F(X)$ в виде равенства $X^2-B = XH+HX,$ и тогда итерационный процесс Ньютона-Канторовича будет иметь следующий вид:

$$X_{n+1} = X_n - H(X_n). \tag{5}$$

Таким образом, возникает следующий алгоритм решения уравнения (1).

1) Находим решение $H=H(X)$ линейного по H уравнения

$$X^2-B = XH+HX. \tag{6}$$

2) Осуществляем итерационный процесс (5).

Проиллюстрируем сказанное на примере матриц $[2\times 2]$.

Пусть

$$X=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{pmatrix},\ H=\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12}\\ h_{21} & h_{22}\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix},$$

тогда

$$X^2-B=\begin{pmatrix} x_{11}^2+x_{12}x_{21}-b_{11} & x_{11}x_{12}+x_{12}x_{22}-b_{12}\\ x_{21}x_{11}+x_{22}x_{21}-b_{21} & x_{12}x_{21}+x_{22}^2-b_{22}\end{pmatrix}, \quad (7)$$

$$XH+HX=\begin{pmatrix} 2x_{11}h_{11}+x_{12}h_{21}+x_{21}h_{12} & x_{11}h_{12}+x_{12}h_{22}+x_{12}h_{11}+x_{22}h_{12}\\ x_{21}h_{11}+x_{22}h_{21}+x_{11}h_{21}+x_{21}h_{22} & x_{21}h_{12}+2x_{22}h_{22}x_{12}h_{21}\end{pmatrix}. \quad (8)$$

Решая уравнение $X^2-B=XH+HX,$ получаем

$$h_{11}=\frac{1}{2(x_{11}+x_{22})(x_{11}x_{22}-x_{21}x_{12})}\Big[(x_{12}x_{21}-x_{11}x_{22}-x_{22}^2)b_{11}+$$
$$+x_{22}x_{21}b_{12}+x_{12}x_{22}b_{21}+x_{12}x_{22}b_{22}\Big],$$

$$h_{12}=\frac{1}{2(x_{11}+x_{22})(x_{11}x_{22}-x_{12}x_{21})}\Big[x_{12}x_{22}b_{11}+(x_{12}x_{21}-2x_{11}x_{22})b_{12}-$$
$$-x_{12}^2b_{21}+x_{11}x_{12}b_{22}\Big],$$

$$h_{21}=\frac{1}{2(x_{11}+x_{22})(x_{11}x_{22}-x_{12}x_{21})}\Big[x_{21}x_{22}b_{11}-x_{21}^2b_{12}+$$
$$+(x_{12}x_{21}-2x_{11}x_{22})b_{21}+x_{11}x_{21}b_{22}\Big],$$

$$h_{22}=\frac{1}{2(x_{11}+x_{22})(x_{11}x_{22}-x_{12}x_{21})}\Big[-x_{12}x_{21}b_{11}+x_{21}x_{11}b_{12}+$$
$$+x_{11}x_{12}b_{21}+(x_{12}x_{21}-x_{11}^2-x_{11}x_{22})b_{22}\Big].$$

Таким образом, можно переходить к итерационному процессу (5). Рассмотрим конкретный пример. Пусть $B=\begin{pmatrix} 2 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ и начальное приближение $x_{11,1}=3$, $x_{12,1}=1$, $x_{21,1}=1$, $x_{22,1}=1$. Тогда после тринадцати итераций получаем

$$X=\begin{pmatrix} 1,30902 & 0,309017\\ 0,927049 & 1,92705\end{pmatrix}.$$

Пусть начальное приближение $x_{11,1}=-3$, $x_{12,1}=1$, $x_{21,1}=1$, $x_{22,1}=1$, то получаем

$$X=\begin{pmatrix} -0,100983 & 0,809018\\ 2,42705 & 1,42705\end{pmatrix}.$$

Если начальное приближение $x_{11,1}=-3$, $x_{12,1}=-1$, $x_{21,1}=-1$, $x_{22,1}=-1$, то

$$X=\begin{pmatrix} -0,30902 & -0,309017\\ -0,927049 & -1,92705\end{pmatrix}.$$

И если $x_{11,1}=0$, $x_{12,1}=-1$, $x_{21,1}=-1$, $x_{22,1}=-1$, то

$$X=\begin{pmatrix} 0,190982 & -0,809019\\ -2,42705 & -1,42705\end{pmatrix}.$$

Находя в каждом случае X^2, убеждаемся, что все найденные матрицы X удовлетворяют уравнению (1).

Заключение. Таким образом, в данной работе разработан эффективный приближенный метод нахождения квадратных корней из матриц, основанный на использовании модифицированного метода Ньютона-Канторовича.

Список литературы

1. Канторович, Л.В. Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. – 3-е изд., перераб. – М.: Наука. Главная редакция физ.-мат. лит-ры, 1984. – 752 с.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ РЕШЕТКИ КЛАССОВ ФИТТИНГА

А.А. Царев, Е.А. Витько
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

Непустая совокупность классов групп Θ называется *полной решеткой классов*, если пересечение любой совокупности классов из Θ снова принадлежит Θ и во множестве Θ имеется такой класс $\mathfrak{F}$, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ для любого другого класса $\mathfrak{H} \in \Theta$. Элемент $\mathfrak{F}$ полной решетки классов Θ называется *компактным*, если для любого подмножества $\eta \subseteq \Theta$ из неравенства $\mathfrak{F} \le sup_\Theta \eta$ следует существование такого конечного подмножества $\eta_0 \subseteq \eta$, что $\mathfrak{F} \le sup_\Theta \eta_0$.

Полная решетка классов Фиттинга называется *алгебраической*, если любой ее элемент является решеточным объединением компактных элементов. В работе найдены серии алгебраических решеток разрешимых классов Фиттинга.

1. Материал и методы. Все рассматриваемые группы конечны и разрешимы. Для произвольного класса групп $\mathfrak{F} \supseteq (1)$ символ $G^{\mathfrak{F}}$ обозначает пересечение всех таких нормальных подгрупп N, что $G/N \in \mathfrak{F}$. Символ $G_{\mathfrak{F}}$ обозначает произведение всех нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп группы G. Положим $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $\overline{\mathbb{N}}_0 = \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, где $\mathbb{N}$ – множество всех натуральных чисел. Для любого $k \in \overline{\mathbb{N}}_0$ будем считать $\infty \pm k = \infty$.

1.1 Определение (K. Müller [1, определение 2.1]). Пусть $n \in \overline{\mathbb{N}}_0$. Подгруппа U группы G называется A^n*-вложенной* (A^n-eingebettet) в G, если существует такая цепь подгрупп $U = U_0 \le U_1 \le \ldots \le U_r = G$, что $U_i^{\mathfrak{N}^{n+1}} \le U_{i-1}$ для всех $i = 1, \ldots, r$, $r \in \mathbb{N}_0$. В этом случае пишут $U\ A^n\ G$.

Поскольку группа G разрешима, то $U_i^{\mathfrak{N}^{n+1}} = 1$ при $n = \infty$ для всех $i = 1, \ldots, r$. Поэтому множество всех A^∞- вложенных подгрупп группы G – это множество всех подгрупп группы G. Из определения следует, что A^n-вложенная подгруппа группы G является A^k-вложенной в G для любого $k \ge n$, $k \in \overline{\mathbb{N}}_0$. Заметим также, что A^0-вложенная подгруппа группы G является субнормальной подгруппой группы G.

1.2 Лемма([1, теорема 2.2]). *Пусть $n \in \overline{\mathbb{N}}_0$ и $U \le G$. Тогда следующие утверждения равносильны:*

1) *$U\ A^n$-вложена в G;*

2) $U^{\mathfrak{N}^n} \lhd\lhd G$.

В соответствии с [3] под *операцией на классах групп* в дальнейшем будем понимать всякое отображение множества всех классов групп в себя. Результат операции c, примененной к классу $\mathfrak{X}$, обозначается через $c\mathfrak{X}$. Степень операции определяется следующим образом: $c^1 = c$, $c^{n+1}\mathfrak{X} = c^n(c\mathfrak{X})$. Произведение операций определяется равенствами: $c_1c_2\mathfrak{X} = c_1(c_2\mathfrak{X})$, $c_1c_2\ldots c_t\mathfrak{X} = c_1(c_2\ldots c_t\mathfrak{X})$.