О МАКСИМАЛЬНЫХ КОММУТАТИВНЫХ ПОДПОЛУГРУППАХ ИДЕМПОТЕНТОВ ПОЛУГРУППЫ ЛИНЕЙНЫХ ОТНОШЕНИЙ

М.И. Наумик
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

Пусть V – n-мерное векторное пространство над полем F. LR(V) – полугруппа линейных отношений [1, 2]. В этой работе рассматриваются максимальные коммутативные подполугруппы идемпотентов полугруппы LR(V), т.е. продолжается изучение полугруппы LR(V), начатое автором в [3, 4].

Пусть, далее, Г – коммутативная подполугруппа идемпотентов;

$$pr_1\Gamma = \sum_{a\in\Gamma} pr_1 a,\ pr_2\Gamma = \sum_{a\in\Gamma} pr_2 a,\ \overline{pr_1}\Gamma = \bigcap_{a\in\Gamma} pr_1 a,\ \overline{pr_2}\Gamma = \bigcap_{a\in\Gamma} pr_2 a,\ V_1 = \overline{pr_1}\Gamma \bigcap \overline{pr_2}\Gamma,$$

$$\overline{pr_1}\Gamma = V_1 \oplus A,\ \overline{pr_1}\Gamma = V_2 \oplus B, \text{ где } \dim A = t,\ \dim B = s,\ \dim V_1 = k.$$

Если $a \in \Gamma$, то $a = W_A W_B^{\#} \oplus a_1 \oplus a_2$, где a_1 – симметрический идемпонент на $V_1 = pr_1 a_1 = pr_2 a_1$ и $co\ker a_1 = \ker a_1$; a_2 – линейное отношение, соответствующее тождественному линейному преобразованию некоторого подпространства V_2' пространства V_2, где $pr_1\Gamma = A \oplus V_1 \oplus V_2,\quad pr_2\Gamma = B \oplus V_1 \oplus V_2$.

Лемма 1. Пусть S – множество попарно коммутирующих симметрических идемпотентов пространства V_1. Тогда существует такой базис $e_1, e_2,\ldots, e_k$ пространства V_1, что при любом $a_1 \in S$

$(e_i, e_i) \in a_1$ или $(e_i, 0), (0, e_i) \in a_1$

Наоборот, если $e_1, e_2,\ldots, e_k$ – базис пространства V_1, а S – множество таких симметрических идемпотентов a_1, что $(e_i, e_i) \in a_1$ или $(e_i, 0), (0, e_i) \in a_1$, то симметрические идемпотенты из S попарно коммутируют.

Доказательство. Из [4] следует, что каждое линейное отношение a_1 можно представить и притом единственным образом в виде $a_1 = a_i e a_i^{\#}$, где a_i – проектор пространства V_1. Из [5] следует, что такой базис существует.

Второе утверждение леммы очевидно. Лемма доказана.

Итак, $a \in \Gamma$, где Г – коммутативная полугруппа идемпотентов из LR(V). Тогда существует такой базис

$$e_1', e_2',\ldots, e_t', e_1'', e_2'',\ldots, e_s'', e_1, e_2,\ldots, e_k, e_1''', e_2''',\ldots, e_m''',\ e_1^{IV}, e_2^{IV},\ldots, e_p^{IV} \qquad (1)$$

пространства V, что $e_1', e_2',\ldots, e_t'$ – базис A; $e_1'', e_2'',\ldots, e_s''$ – базис B; $e_1, e_2,\ldots, e_k$ – базис V_1, $e_1''', e_2''',\ldots, e_k'''$ – базис V_2, $e_1^{IV}, e_2^{IV},\ldots, e_p^{IV}$ – базис V_3, где $V = A \oplus B \oplus V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$, $\dim V_2 = m$, $\dim V_3 = p$ и $t + s + k + m + p = n$.

Имеем

$$(e_i', 0) \in a, (0, e_i'') \in a, (e_i, e_i) \in a \text{ или } (e_i, 0), (0, e_i) \in a, (e_i''', e_i''') \in a, \qquad (2)$$

Такой базис (1) будем называть соответствующим полугруппе Г.

Каждый идемпотент a полугруппы Г определяется набором тех векторов из соответствующего базиса, которые он оставляет на месте. Так как число подмножеств из (1) равно 2^{k+m}, то отсюда вытекает

Следствие. Число элементов в коммутативной полугруппе идемпотентов пространства V не превосходит 2^{k+m+p}.

Лемма 2. Пусть $e_1, e_2,\ldots, e_n$ – базис пространства V,

S = {$a \in LR(V)$ | для a выполняются условия (2)} – максимальная коммутативная полугруппа идемпотентов.

Доказательство получаем из выше сказанного, поскольку полугруппа содержит ровно 2^{k+m+p} элементов.

Лемма 3. Каждую коммутативную полугруппу идемпотентов Г можно погрузить в максимальную коммутативную полугруппу идемпотентов.

Доказательство. Пусть $e_1, e_2, ..., e_n$ – базис, соответствующий полугруппе Г (следствие), а S – та же максимальная коммутативная полугруппа идемпотентов, что и в лемме 2. Тогда очевидно, что $\Gamma \subset S$. Лемма доказана.

Лемма 4. Пусть S – максимальная коммутативная полугруппа идемпотентов и $e_1, e_2, ..., e_n$ – соответствующий ей базис. Тогда

$S = \{a \in LR(V) \mid$ для a выполняются условия (2)$\}$

Доказательство. Так же, как и при доказательстве леммы 3, получаем

$S \subset \{a \in LR(V)$ | для a выполняются условия (2)}. А вследствие максимальной S здесь имеет место равенство. Лемма доказана.

Лемма 5. Пусть S – максимальная коммутативная полугруппа идемпотентов и $e_1, e_2, ..., e_n$ – соответствующий ей базис. Тогда любой другой базис, соответствующий полугруппе S, имеет вид $f_1 = \lambda_1 e_1, f_2 = \lambda_2 e_2, ..., f_n = \lambda_n e_n$

Доказательство. Обозначим через b_k линейное отношение $(e_i, e_k) \in b_k$, если $i = k$ и $(e_i, 0) \in b_k$, если $i \neq k$ или $(0, e_i) \in b_k$ или $(e_i, 0) \in b_k$ и $(0, e_i) \in b_k$. По лемме 4 $b_k \in S$. Следовательно, в соответствующем базисе $f_1, f_2, ..., f_n$ существует вектор, которому мы припишем номер k такой, что $(f_k, f_k) \in b_k$. Тогда $f_k = b_k f_k = b_k \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = \lambda_k e_k$. Лемма доказана.

Определение. Две подполугруппы M и N полугруппы LR(V) называются подобными, если существует такое линейное отношение ранга n $g \in LR(V)$, что $N = g^{-1} M g$.

Теорема 1. Любые две максимальные коммутативные полугруппы идемпотентов пространства V подобны.

Доказательство. Пусть S_1 и S_2 – две максимальные коммутативные полугруппы идемпотентов, $e_1, e_2, ..., e_n$ и $f_1, f_2, ..., f_n$ – соответствующие им базисы, g – линейное отношение ранга n из $LR(V)$, переводящее один из этих базисов во второй, $(e_i, f_i) \in g$. Непосредственно проверяется, что внутренний автоморфизм полугруппы $LR(V)$, индуцируемый линейным отношением g, отображает S_1 на S_2. Теорема доказана.

Теорема 2. Существует лишь конечное число неподобных коммутативных полугрупп идемпотентов.

Доказательство. Пусть S' – какая-то фиксированная максимальная коммутативная полугруппа идемпотентов, а Г – произвольная коммутативная полугруппа идемпотентов. Погрузим Г в максимальную коммутативную полугруппу идемпотентов (лемма 3). Тогда S' и S подобны, а значит, полугруппа Г подобна некоторой подполугруппе из S'. Но в S' имеется лишь конечное число подполугрупп (следствие). Теорема доказана.

Список литературы

1. Sneperman, L.B. The Shur theorem for periodic semigroups of linear relations / L.B. Sneperman // Semigroup Forum. – 1982. – Vol. 25. – S. 203–211.
2. Шнеперман, Л.Б. О полугруппе рефлексивных линейных отношений / Л.Б. Шнеперман // Вопросы алгебры. – Минск: Изд-во «Университетское», 1987. – № 3. – С. 117–123.
3. Наумик, М.И. Полугруппа линейных отношений / М.И. Наумик // Доклады НАН Беларуси. – 2004. – Т. 48, № 3. – С. 34–37.
4. Наумик, М.И. Описание конгруэнций конечного индекса на полугруппе линейных отношений / М.И. Наумик // Вестник Полоцкого государственного университета. Сер. С. Фундаментальные науки. – 2008. – № 9. – С. 58–65.
5. Шнеперман, Л.Б. Максимальные инверсные подполугруппы полугрупп линейных преобразований / Л.Б. Шнеперман // Известия вузов. Математика. – 1974. – № 11(150). – С. 93–100.