ПОРОЖДЕННЫЕ КРАТНО ЛОКАЛЬНЫЕ КЛАССЫ ФИТТИНГА

Н.Н. Воробьев
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

Все рассматриваемые группы конечны. Мы будем использовать стандартную терминологию из [1–3].

Напомним, что классом Фиттинга называется класс групп F, замкнутый относительно нормальных подгрупп и произведений нормальных F-подгрупп.

Пусть ω − некоторое непустое множество простых чисел и $\omega' = \notin \setminus \omega$. Через $\pi(G)$ обозначено множество всех различных простых делителей порядка группы G. Символы (1), N_p, $\mathsf{G}_{p'}$ и $\mathsf{G}_{\omega d}$ обозначают соответственно класс всех единичных групп, класс всех p-групп, класс всех p'-групп и класс всех таких групп, у которых каждый композиционный фактор является ωd-группой. Напомним, что для произвольного класса групп $\mathsf{F} \supseteq (1)$ символ G^{F} обозначает пересечение всех таких нормальных подгрупп N, что $G/N \in \mathsf{F}$. Полагают (см. [2]) $G^{\omega d} = G^{\mathsf{G}_{\omega d}}$, $O^p(G) = G^{\mathsf{N}_p}$ и $F^p(G) = G^{\mathsf{N}_p\mathsf{G}_{p'}}$.

Пусть f − произвольная функция вида

$$f \ \omega \bigcup \{\omega'\} \to \{\text{классы Фиттинга}\} \qquad (1)$$

Функции f вида (1) сопоставляют класс групп

$$LR_\omega(f) = (G \mid G^{\omega d} \in f(\omega') \text{ и } F^p(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \omega \bigcap \pi(G)).$$

Если класс Фиттинга F таков, что $\mathsf{F} = LR_\omega(f)$ для некоторой функции f вида (1), то F называется ω-локальным классом Фиттинга с ω-локальной H-функцией f [2].

Пусть X − произвольная непустая совокупность групп. Пересечение всех ω-локальных классов Фиттинга, содержащих X, обозначают через $l_\omega \mathrm{fit}\mathsf{X}$ и называют ω-локальным классом Фиттинга, порожденным X [2].

Основным результатом является

Теорема. Пусть M − разрешимый нормально наследственный класс и $A \in l^n{}_\omega\mathrm{fit}\mathsf{M}$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если $O^p(A) = A$ и $p \in \omega$, то $A \in l^n{}_\omega\mathrm{fit}\mathsf{M}_1$, где $\mathsf{M}_1 = (O^p(G) \mid G \in \mathsf{M})$;

2) если $A^{\omega d} = A$, то $A \in l^n{}_\omega\mathrm{fit}\mathsf{M}_2$, где $\mathsf{M}_2 = (G^{\omega d} \mid G \in \mathsf{M})$.

Список литературы

1. Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А. Н. Скиба. – Минск: Беларуская навука, 1997. – 240 с.
2. Скиба, А.Н. Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Матем. труды. – 1999. – Т. 2, № 2. – С. 114–147.
3. Воробьев, Н.Н. Алгебра классов конечных групп : монография / Н.Н. Воробьев. – Витебск : ВГУ имени П. М. Машерова, 2012. – 322 с.

КРИТЕРИЙ ЛОКАЛЬНОЙ НОРМАЛЬНОСТИ ОБЪЕДИНЕНИЙ КЛАССОВ ФИТТИНГА

Н.Т. Воробьев
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

В теории нормальных классов Фиттинга одной из актуальных задач является задача разработки новых методов построения нормальных классов Фиттинга. Напомним, что класс Фиттинга F является нормальным, если для любой разрешимой группы G ее F-радикал является максимальной из подрупп G, принадлежащих F. Один из методов образования новых нормальных классов Фиттинга с помощью двух данных классов Фиттинга был предложен Косси [1]. В [1] установлено, что произведение двух классов Фиттинга является нормальным классом Фиттинга в случае, когда хотя бы один из множителей нормальный класс Фиттинга. В последующем Кусаком [2] разрабатывались методы образования нормальных классов посредством операции решеточного объединения.

Пусть F и H – классы Фиттинга. Тогда FVH – наименьший из классов Фиттинга, содержащий классы Фиттинга F и H, то есть их объединение $F \cup H$.

Основная цель настоящей работы – обобщение понятия нормального класса Фиттинга и описание построения обобщенно нормальных классов Фиттинга посредством операции V.

Пусть $\pi \subseteq P$. Класс Фиттинга π-групп назовем π-нормальным, если для любой π-группы G ее F-радикал является F-максимальной подгруппой G.

Доказана

Теорема. *Пусть F и H классы π-групп. Тогда класс Фиттинга FVH является π-нормальным в том и только в том случае, если хотя бы один из классов F или H π-нормален.*

Список литературы

1. Cossey, J. Products of Fitting classes / J. Cossey // Math. Z. – 1975. – Bd. 141, №3. – S. 289–295.
2. Cusack, E. The join of two Fitting classes / E. Cusack // Math. Z. – 1979. – Bd. 167, №1. – S. 37–47.

КЛАССЫ ФИШЕРА С ЗАДАННЫМИ СВОЙСТВАМИ ХОЛЛОВЫХ ПОДГРУПП

С.Н. Воробьев

Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

Многие результаты теории групп связаны с изучением свойств классов групп, определяемых заданными свойствами холловых π-подгрупп (см., например, монографии [1, § 16], [2, главы IX-X], а также серию работ [3], [4], [5], [6] и др. Напомним, что если n – натуральное число, то через $\sigma(n)$ обозначают множество всех простых делителей n; если G – группа, то $\sigma(G)=\sigma(|G|)$. Пусть π – подмножество множества всех простых чисел и $\pi'=P/\pi$. Натуральное число n называется π-числом (π'-числом), если $\sigma(n)\subseteq\pi$ $(\sigma(n)\subseteq\pi')$. Пусть $H\leq G$ и $|H|$ является π-числом. Тогда H называют π-подгруппой группы G. Если d – делитель n и $\sigma(d)\subseteq\pi$, то d называют π-делителем числа n. Обозначим через n_π наибольший π-делитель числа n. Тогда подгруппу порядка $|G|_\pi$ называют холловой -подгруппой группы G и обозначают G_π.

Следуя [3], группу G будем называть E_π-группой, если в G имеется хотя бы одна холлова π-подгруппа, и C_π-группой, если G является E_π-группой и любые две холловы π-подгруппы G сопряжены. Символами E_π и C_π будем обозначать классы всех E_π-групп и всех C_π-групп соответственно.

Пусть X – некоторый класс групп. Через $E_\pi X$ обозначим класс всех групп, обладающих по крайней мере одной холловой π-подгруппой, принадлежащей X, а через $C_\pi X$ – класс групп $C_\pi \cap E_\pi X$.

Напомним, что класс групп называют формацией, если он замкнут относительно гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. Формацию F называют насыщенной или локальной, если F замкнута относительно фраттиниевых расширений, т.е. из того, что $G/\Phi(G)\in F$ всегда следует $G\in F$ (здесь $\Phi(G)$ – подгруппа Фраттини группы G, т.е. пересечение всех максимальных подгрупп G).

В работе [5] было доказано, что если F – насыщенная формация, то класс всех разрешимых $C_\pi F$-групп также является насыщенной формацией. Позднее в [6] (см. также теорема 1.3.24 [1]) было показано, что класс всех π-обособленных $C_\pi F$-групп – насыщенная формация для любой насыщенной формации F.

Напомним, что группу G называют π-обособленной, если группа G обладает таким главным рядом, каждый фактор которого является либо π-группой, либо π'-группой.

В [1] Л.А. Шеметковым была сформулирована следующая

Гипотеза [1, проблема 19]. *Пусть π– некоторое множество простых чисел, F – насыщенная формация. Тогда $C_\pi F$ – насыщенная формация.*

Объектами, дуальными формациям и насыщенным формациям, являются классы Фиттинга и локальные классы Фиттинга. В теории классов Фиттинга результат, в точности, аналогичный [5], получен в [7], где доказано, что для любого множества простых чисел π и любого локального класса Фиттинга F класс всех разрешимых $C_\pi F$-групп также является локальным классом Фиттинга.

Настоящая работа посвящена нахождению тех условий, при которых аналог гипотезы Шеметкова справедлив для класса всех $C_\pi F$-групп в случае, когда F – класс Фишера.