

КЛАССЫ ФИТТИНГА С ЗАДААННЫМИ СВОЙСТВАМИ ХОЛЛОВЫХ ПОДГРУПП

*Е.А. Витько, Н.Т. Воробьев
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова*

В определениях и обозначениях мы следуем [1, 2].

Все рассматриваемые в работе группы конечны.

Основная цель настоящей работы – построение новых семейств классов Фиттинга.

Обозначим $\pi(n)$ – множество всех простых делителей натурального числа n , $\pi(G) = \pi(|G|)$ – множество всех простых делителей порядка группы G .

Пусть $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ – некоторое разбиение множества всех простых чисел P такое, что $P = \bigcup_{i \in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ для всех $i \neq j$. Пусть Π – некоторое подмножество множества σ и $\Pi' = \sigma \setminus \Pi$.

Пусть $\sigma(n) = \{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \pi(n) \neq \emptyset\}$, $\sigma(G) = \sigma(|G|)$.

Группу G называют

- 1) σ -примарной, если $G = 1$ или $|\sigma(G)| = 1$;
- 2) σ -бипримарной, если $|\sigma(G)| = 2$;
- 3) Π -группой, если $\sigma(G) \subseteq \Pi$.

Группу G называют σ -разрешимой, если каждый главный фактор группы G является σ -примарным.

Группу G называют Π -разрешимой, если каждый главный фактор группы G является Π' -группой или σ_i -группой для некоторого $\sigma_i \in \Pi$.

Обозначают S_σ – класс всех σ -разрешимых групп, S_Π – класс всех Π -разрешимых групп.

Подгруппу H группы G называют

- 1) холловой Π -подгруппой группы G , если H – Π -подгруппа и $|G : H|$ – Π' -число;
- 2) σ -холловой подгруппой группы G , если H холловой Π -подгруппа группы G для некоторого $\Pi \subseteq \sigma$.

Обозначим $\text{Hall}_\Pi(G)$ – множество всех холловых Π -подгрупп группы G ; $\text{Hall}_\sigma(G)$ – множество всех σ -холловых подгрупп группы G .

Определение. Пусть F – класс Фиттинга. Определим классы групп $\mathcal{K}_\Pi(F)$ и $\mathcal{K}_\sigma(F)$

$$\mathcal{K}_\Pi(F) = (G \in S_\Pi : \text{Hall}_\Pi(G) \subseteq F),$$

$$\mathcal{K}_\sigma(F) = (G \in S_\sigma : \text{Hall}_\sigma(G) \subseteq F).$$

Напомним, что класс групп F называется классом Фиттинга, если F обладает следующими свойствами:

- 1) если $G \in F$ и $N \trianglelefteq G$, то $N \in F$;
- 2) если $N_1, N_2 \in F$, $N_1 \trianglelefteq G$, $N_2 \trianglelefteq G$ и $G = N_1 N_2$, то $G \in F$.

Если F – класс Фиттинга и π – некоторое множество простых чисел, то через $\mathcal{K}_\pi(F)$ обозначают класс всех тех π -разрешимых групп G , в которых холлова π -подгруппа является F -группой, т.е.

$$\mathcal{K}_\pi(F) = (G \in S^\pi : G_\pi \in F).$$

В работе [3] доказано, что класс $\mathcal{K}_\pi(F)$ является классом Фиттинга для любого класса Фиттинга F .

Заметим, что класс $\mathcal{K}_\pi(F)$ является специальным случаем классов $\mathcal{K}_\Pi(F)$ и $\mathcal{K}_\sigma(F)$. В частности, если $\pi = \{p_1, \dots, p_t, \dots\}$ и $\sigma = \{\{p_1\}, \dots, \{p_t\}, \dots, \pi'\}$, то $\mathcal{K}_\sigma(F) = \mathcal{K}_\pi(F)$. В связи с этим возникает задача изучения классов групп $\mathcal{K}_\Pi(F)$ и $\mathcal{K}_\sigma(F)$. Первоочередным в таких исследова-

ниях является вопрос о том, будут ли классы групп $\mathcal{K}_\Pi(F)$ и $\mathcal{K}_\sigma(F)$ классами Фиттинга в случае, когда F – класс Фиттинга. Положительный ответ на данный вопрос дает

Теорема. Для любого класса Фиттинга F классы $\mathcal{K}_\Pi(F)$ и $\mathcal{K}_\sigma(F)$ являются классами Фиттинга.

Список литературы

1. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin-New York : Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
2. Скиба, А.Н. О σ -свойствах конечных групп II / А.Н. Скиба // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 3(24). – С. 70–83.
3. Воробьев, Н.Т. О свойствах радикалов холловых подгрупп π -разрешимых групп / Н.Т. Воробьев, Е.А. Витько, Н.В. Иванова // Вестн. Витебского дзярж. ун-та. – 2008. – №2 (48). – С. 125–129.

О СВОЙСТВЕ ФИТТИНГОВЫХ ФУНКТОРОВ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ АРГУМЕНТУ ФРАТТИНИ

Е.А. Витько, А.А. Царев
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

В определениях и обозначениях мы следуем [1].

Все рассматриваемые в работе группы конечны.

Основная цель настоящей работы – описание нового свойства фиттинговых функторов, удовлетворяющих аргументу Фраттини.

Пусть X – некоторый непустой класс Фиттинга. Отображение f которое каждой группе $G \in X$ ставит в соответствие некоторое непустое множество ее подгрупп $f(G)$, называется [2] фиттинговым X -функтором, если выполняются следующие условия:

(i) если $\alpha: G \rightarrow \alpha(G)$ – изоморфизм, то

$$f(\alpha(G)) = \{\alpha(X); X \in f(G)\};$$

(ii) если N – нормальная подгруппа группы G , то

$$f(N) = \{X \cap N; X \in f(G)\}.$$

Фиттингов X -функтор называется

1) сопряженным, если для каждой группы $G \in X$ множество $f(G)$ есть класс сопряженных подгрупп группы G ;

2) удовлетворяющим аргументу Фраттини, если для любой группы $G \in X$, нормальной подгруппы N группы G и подгруппы $X \in f(G)$ выполняется равенство $G = N_G(X \cap N)N$.

Пусть I – множество индексов, $\{f_i: i \in I\}$ – множество фиттинговых X -функторов. Объединением фиттинговых X -функторов f_i ($i \in I$) называется отображение $\bigcup_{i \in I} f_i$, сопоставляющее каждой группе $G \in X$ непустое множество подгрупп $\bigcup_{i \in I} f_i(G)$.

Доказана

Теорема. Пусть f – фиттингов X -функтор. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) функтор f удовлетворяет аргументу Фраттини;

2) $f = \bigcup_{i \in I} f_i$, где $\{f_i: i \in I\}$ – множество сопряженных фиттинговых X -функторов.

Работа авторов поддержана Белорусским республиканским фондом фундаментальных исследований, проект Ф15РМ – 025 (БРФФИ – РФФИ М – 2015).

Список литературы

1. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin-New York : Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
2. Витько, Е.А. Фиттинговы функторы и радикалы конечных групп / Е.А. Витько, Н.Т. Воробьев // Сиб. матем. журнал. – 2011. – Т. 52, № 6. – С. 1253–1263.