УДК 517.926.4

С.Г. Красовский

Характеристические спектральные множества линейных сингулярных систем

Рассматриваем исходную линейную систему

$$\dot{x} = A(t)x\,, \qquad x \in R^n\,, \qquad t \geq 0\,, \qquad (1_A)$$

с кусочно-непрерывной ограниченной матрицей $A(t)$, совокупностью характеристических показателей $\lambda_1(A) \leq \ldots \leq \lambda_n(A)$, составляющих точку $\lambda(A)$ пространства R^n, и коэффициентом неправильности Гробмана [1] $\sigma_\Gamma(A)$. Рассмотрим также сингулярную возмущенную систему

$$\varepsilon\dot{y} = A(t)y + Q(t)y\,, \quad y \in R^n\,, \qquad \varepsilon \in (0,1]\,, \qquad t \geq 0\,, \qquad (1_{(A+Q)/\varepsilon})$$

с кусочно-непрерывной ограниченной матрицей $Q(\cdot)$.

Определение [2]. *Спектральным множеством системы* (1_A) *при возмущениях* $Q(\cdot)$ *из некоторого класса* K *называется множество* $S(A;K) \equiv \bigcup\limits_{Q(\cdot)\in K} \lambda(A+Q) \subset R^n$.

Д.М. Гробманом [1] доказано, что в случае класса K_σ экспоненциально убывающих возмущений $Q(\cdot)$ с показателем Ляпунова $\lambda[Q] \equiv \overline{\lim\limits_{t\to+\infty}}\, t^{-1}\ln\|Q(t)\| \leq -\sigma < -\sigma_\Gamma(A)$ спектральное множество $S(A;K_\sigma)$ системы (1_A) состоит из одной точки: совокупности $\lambda(A) \in R^n$ ее характеристических показателей: $S(A;K_\sigma) = \lambda(A)$, $\operatorname{mes} S(A;K_\sigma) = 0$.

Н.А. Изобовым [3, 4] введено понятие *гробмановского спектрального множества*

$$S_{\sigma_\Gamma}(A) \equiv \bigcup_{\lambda[Q]\leq -\sigma_\Gamma(A)} \lambda(A+Q) \subset R^n$$

и установлено, что для этого множества происходит скачок n-меры Лебега: $\underline{\operatorname{mes}}_n S_{\sigma_\Gamma}(A) > 0$ и построена система (1_A), для которой полностью описано гробмановское спектральное множество, в двумерном случае совпадающее с некоторым треугольником.

В работах [5-8] указаны конструктивные способы построения спектральных множеств систем $(1_{A/\varepsilon})$, содержащих при производной параметр $\varepsilon \in (0,1]$. В этих работах рассматриваются сингулярные возмущенные линейные системы $(1_{(A+Q)/\varepsilon})$ с кусочно-непрерывными матрицами $Q(\cdot)$, показатель Ляпунова $\lambda[Q]$ которых не превосходит величины $-\sigma < 0$. По аналогии с гробмановским спектральным множеством, в [5] дано определение *спектрального сигма-множества* $S_\sigma(A) = \bigcup\limits_{\lambda[Q] \le -\sigma} \lambda(A+Q) \subset R^n$ системы (1_A).

В работах [6, 7] доказано существование таких двумерных систем (1_A) с бесконечно дифференцируемыми ограниченными коэффициентами, имеющими ограниченные производные произвольного порядка (каждая производная ограничена своим числом), и совпадающими (различными) характеристическими показателями, что спектральные сигма-множества $S_\sigma(A/\varepsilon)$ сингулярно возмущенных систем $(1_{A/\varepsilon})$ имеют положительную плоскую меру (внутреннюю меру) Лебега при каждом фиксированном $\sigma > 0$ и всех достаточно малых $\varepsilon > 0$, причем эта мера не ограничена по малому параметру.

Теорема 1 [6]. *Для любых чисел* $\lambda_1 < \lambda_2$ *и* $\sigma_0 > 2(\lambda_2 - \lambda_1)$ *существует двумерная система* (1_A) *с бесконечно дифференцируемыми ограниченными коэффициентами и их производными, имеющая характеристические показатели* $\lambda_i(A) = \lambda_i$, $i = 1,2$, *и коэффициент неправильности Гробмана* $\sigma_\Gamma(A) = \sigma_0$, *такая, что спектральное сигма-множество* $S_\sigma(A/\varepsilon)$ *системы* $(1_{A/\varepsilon})$ *при всяких* $\sigma > 0$ *и* $0 < \varepsilon < [\sigma_0 + 2(\lambda_1 - \lambda_2)]\sigma^{-1}$ *содержит множество точек* $(\mu_1, \mu_2) \in R^2$, *определяемое неравенствами*

$$\lambda_2 - \sigma_0(\theta - 1)^{-1} \le \varepsilon\mu_1 < \lambda_2 \le \varepsilon\mu_2 \le (\lambda_2 - \varepsilon\mu_1)\theta^{-2} + \lambda_2 + (\sigma_0 + \lambda_1 - \lambda_2 - \varepsilon\sigma)\theta^{-1},$$

$$\text{где } \theta > 2\sigma_0(\lambda_2 - \lambda_1)^{-1} - 1 > 3.$$

Следствие 1 [6]. *Плоская внутренняя мера* $\underline{\text{mes}}_2 S_\sigma(A/\varepsilon)$ *множества* $S_\sigma(A/\varepsilon)$ *неограниченно возрастает при* $\varepsilon \to +0$.

Заметим, что при доказательстве теоремы 1 была построена лишь часть спектрального сигма-множества сингулярной системы. В случае $\lambda_1 = \lambda_2$ в [7] построено полное спектральное сигма-множество, также обладающее свойством неограниченности по малому параметру.

Теорема 2 [7]. *Для любых действительных чисел* λ, $\sigma_0 > 0$ *и* $\theta > 1$ *существует двумерная система* (1_A) *с бесконечно дифференцируемыми ограниченными коэффициентами и их производными, имеющая характеристические показатели* $\lambda_i(A) = \lambda$, $i = 1,2$, *и коэффициент неправильности Гробмана* $\sigma_\Gamma(A) = \sigma_0$, *такая, что спектральное сигма-множество* $S_\sigma(A/\varepsilon)$ *системы* $(1_{A/\varepsilon})$ *при всяких* $\sigma > 0$ *и* $0 < \varepsilon < \sigma_0/\sigma$ *совпадает с треугольником*

$$\Delta(A/\varepsilon) \equiv \{(\mu_1, \mu_2) \in R^2 : \lambda(\theta+1) - \varepsilon\theta\mu_2 \le \varepsilon\mu_1 \le \varepsilon\mu_2 \le \lambda + (\sigma_0 - \varepsilon\sigma)(\theta - 1)^{-1}\}.$$

Следствие 2 [7]. *Плоская мера* $\text{mes}_2 S_\sigma(A/\varepsilon)$ *при всяком фиксированном* $\sigma > 0$ *неограниченно возрастает по параметру* $\varepsilon \to +0$.

На основе теорем 1, 2 получен аналогичный результат и для сингулярных систем $(1_{A/\varepsilon})$ произвольной четной размерности $2n$, $n \in N$.

Теорема 3 [8]. *Для произвольного* $n \in N$ *и любых чисел* $\lambda_1 \le \ldots \le \lambda_{2n}$, $\sigma_0 > 2\max_{k=\overline{1,n}}\{\lambda_{2k} - \lambda_{2k-1}\} \equiv 2L$ *существует* $2n$*-мерная система* (1_A) *с бесконечно дифференцируемыми ограниченными коэффициентами и их производными, имеющая характеристические показатели* $\lambda_i(A) = \lambda_i$, $i = \overline{1,2n}$, *и коэффициент неправильности Гробмана* $\sigma_\Gamma(A) = \sigma_0$, *такая, что спектральное сигма-множество* $S_\sigma(A/\varepsilon)$ *системы* $(1_{A/\varepsilon})$ *при всяких* $\sigma > 0$ *и* $0 < \varepsilon < (\sigma_0 - 2L)/\sigma$ *содержит множество точек* $(\mu_1, \ldots, \mu_{2n}) \in R^{2n}$, *координаты которых* $\mu_1 < \ldots < \mu_{2n}$ *удовлетворяют также и неравенствам*

$$\lambda_{2k} - \sigma_0(\theta - 1)^{-1} \le \varepsilon\mu_{2k-1} \le \lambda_{2k} < \varepsilon\mu_{2k} \le (\lambda_{2k} - \varepsilon\mu_{2k-1})\theta^{-2} + \lambda_{2k} + (\sigma_0 + \lambda_{2k-1} - \lambda_{2k} - \varepsilon\sigma)\theta^{-1},$$

если $\lambda_{2k} > \lambda_{2k-1}$, $k \in \{1, \ldots, n\}$, *либо неравенствам*

$$-\varepsilon\mu_{2k} + \lambda_{2k}(\theta + 1) \le \varepsilon\mu_{2k-1} \le \varepsilon\mu_{2k} \le \lambda_{2k} + (\sigma_0 - \varepsilon\sigma)\theta^{-1},$$

если $\lambda_{2k} = \lambda_{2k-1}$, $k \in \{1, \ldots, n\}$, *где* $\theta > -1 + 2\sigma_0 \max_{k=\overline{1,n}}\{(\lambda_{2k} - \lambda_{2k-1})^{-1} \mid \lambda_{2k} > {}_{2k-1}\} > 3$, *если* $L > 0$, *либо* $\theta > 1$, *если* $L = 0$.

Следствие 3 [8]. *Для построенной системы* $\underline{\mathrm{mes}}_{2n} S_\sigma(A/\varepsilon) > 0$ *при всех* $\sigma > 0$ *и всех достаточно малых* $\varepsilon > 0$, *причем* $\lim_{\varepsilon \to +0} \underline{\mathrm{mes}}_{2n} S_\sigma(A/\varepsilon) = +\infty$.

Задача построения сингулярных систем $(1_{A/\varepsilon})$ нечетной размерности $n \ge 3$, имеющих спектральное сигма-множество положительной n – меры Лебега, неограниченное по малому параметру, пока остается нерешенной.

Возникает также вопрос о существовании классов возмущений, при которых для всех значений параметра $\varepsilon > 0$ характеристическая совокупность сингулярной системы $(1_{A/\varepsilon})$ сохраняется. Положительный ответ на этот вопрос дан в работах [9, 10].

Рассмотрим возмущенную систему $(1_{(A+Q)/\varepsilon})$ с матрицей $Q(\cdot)$ из класса возмущений $K_{\sigma(\cdot)} = \{Q : \|Q(t)\| \le C_Q \exp[\sigma(t)t],\ t \ge 0\}$, где $\sigma(t)$ – кусочно-непрерывная на промежутке $[0,+\infty)$ функция, а C_Q – некоторая положительная постоянная. В работе [9] получено достаточное условие асимптотической эквивалентности [11] систем $(1_{(A+Q)/\varepsilon})$ и $(1_{A/\varepsilon})$. Заметим, что из асимптотической эквивалентности систем следует [12] совпадение совокупностей их характеристических показателей.

Теорема 4 [9]. *Возмущенная* $(1_{(A+Q)/\varepsilon})$ *и исходная* $(1_{A/\varepsilon})$ *системы асимптотически эквивалентны при любых кусочно-непрерывных ограниченных матрицах* $A(t)$, *значениях параметра* $\varepsilon > 0$ *и возмущениях* $Q(\cdot)$ *из класса* $K_{\sigma(\cdot)}$ *с кусочно-непрерывной функцией* $\sigma(t)$, *удовлетворяющей условию*

$$\lim_{t \to +\infty} \sigma(t) = -\infty. \tag{2}$$

Следствие 4 [9]. *Характеристические совокупности* $\lambda((A+Q)/\varepsilon)$ *возмущенной* $(1_{(A+Q)/\varepsilon})$ *и* $\lambda(A/\varepsilon)$ *исходной* $(1_{A/\varepsilon})$ *систем совпадают при любых кусочно-непрерывных ограниченных матрицах* $A(t)$, *параметрах* $\varepsilon > 0$ *и* *возмущениях $Q(\cdot)$ из класса $K_{\sigma(\cdot)}$ с кусочно-непрерывной функцией $\sigma(t)$, удовлетворяющей условию* (2).

В той же работе показано, что условие теоремы 4 не является необходимым для асимптотической эквивалентности возмущенной и исходной систем, а следовательно, и для совпадения их характеристических совокупностей.

Теорема 5 [9] *Существует такая удовлетворяющая условию*

$$-\infty = \underline{\lim}_{t\to+\infty} \sigma(t) < \overline{\lim}_{t\to+\infty} \sigma(t) = 0$$

бесконечно дифференцируемая функция $\sigma : [0,+\infty) \to (-\infty,0]$, что линейные системы: исходная $(1_{A/\varepsilon})$ с любой кусочно-непрерывной ограниченной матрицей $A(t)$ и возмущенная $(1_{(A+Q)/\varepsilon})$ с произвольным возмущением $Q \in K_{\sigma(\cdot)}$ являются асимптотически эквивалентными при всех значениях параметра $\varepsilon > 0$.

Необходимое условие для асимптотической эквивалентности систем $(1_{A/\varepsilon})$ и $(1_{(A+Q)/\varepsilon})$ содержит

Теорема 6 [9]. *Если системы $(1_{A/\varepsilon})$ и $(1_{(A+Q)/\varepsilon})$ с любыми кусочно-непрерывными ограниченными матрицами $A(t)$ и любыми возмущениями $Q \in K_{\sigma(\cdot)}$ асимптотически эквивалентны при всех $\varepsilon > 0$, то кусочно-непрерывная функция $\sigma(t)$ удовлетворяет условию $\underline{\lim}_{t\to+\infty} \sigma(t) = -\infty$.*

Следствие 5. *Если спектральное множество $S(A/\varepsilon; K_{\sigma(\cdot)})$ системы $(1_{A/\varepsilon})$ с произвольной кусочно-непрерывной ограниченной матрицей $A(t)$ имеет меру $\mathrm{mes}\, S(A/\varepsilon; K_{\sigma(\cdot)}) = 0$ при всех $\varepsilon > 0$, то кусочно-непрерывная функция $\sigma(t)$ удовлетворяет условию $\underline{\lim}_{t\to+\infty} \sigma(t) = -\infty$.*

В работе [11] установлено, что в случае дифференцируемых функций $\sigma(t)$ с ограниченной производной условие (2) является не только достаточным, но и необходимым для сохранения характеристической совокупности системы $(1_{A/\varepsilon})$. Справедлив следующий критерий инвариантности характеристической совокупности линейной сингулярной системы относительно быстро убывающих возмущений.

Теорема 7 [10]. *Пусть функция $\sigma : [0,+\infty) \to (-\infty,0]$ является непрерывно дифференцируемой и имеет ограниченную производную. Характеристические совокупности $\lambda((A+Q)/\varepsilon)$ и $\lambda(A/\varepsilon)$ соответственно систем $(1_{(A+Q)/\varepsilon})$ и $(1_{A/\varepsilon})$ тогда и только тогда совпадают при любых кусочно-непрерывных ограниченных матрицах $A(t)$, возмущениях $Q \in K_{\sigma(\cdot)}$ и $\varepsilon \in (0,1]$, когда выполнено условие (2).*

Работа выполнена в рамках Государственной программы «Математические структуры» при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф00-089).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гробман Д.М.** Характеристические показатели систем, близких к линейным // Мат. сб., 1952. Т. 30(72), №1. С. 121-166.

2. ***Изобов Н.А., Зверева Т.Е.*** Спектр характеристических показателей двухмерной стационарной системы при возмущениях-поворотах // Дифференц. уравнения, 1981. Т. 17, №11. С. 1964-1977.
3. ***Изобов Н.А.*** О характеристических показателях линейных систем с гробмановскими возмущениями // Дифференц. уравнения, 1991. Т. 27, №3. С. 428-437.
4. ***Изобов Н.А.*** О существовании гробмановских спектральных множеств линейных систем положительной меры // Дифференц. уравнения, 1991. Т. 27, №6. С. 953-957.
5. ***Izobov N.A., Krasovskii S.G.*** On existence of a measure unbounded exponential spectral quantization on symplectic manifolds // Mem. Differential Equations Math. Phys, 1998. Vol. 13. P. 140-144.
6. ***Изобов Н.А., Красовский С.Г.*** О существовании линейной сингулярной системы с неограниченным по мере экспоненциальным характеристическим множеством // Дифференц. уравнения, 1998. Т. 34, №8. С. 1049-1055.
7. ***Красовский С.Г.*** О спектральном множестве линейной сингулярной системы с совпадающими показателями // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 1999. №3. С. 10-15.
8. ***Красовский С.Г.*** О спектральных сигма-множествах сингулярных линейных систем четной размерности // Тез. докл. междунар. конф. «Еругинские чтения – VIII». Брест, 2002. С. 95-96.
9. ***Красовский С.Г.*** Об асимптотической эквивалентности линейных сингулярных дифференциальных систем // Докл. НАН Беларуси, 2002. Т. 46, №3. С. 35-37.
10. ***Красовский С.Г.*** Об инвариантности характеристических показателей линейных сингулярных систем // Дифференц. уравнения, 2000. Т. 36, №6. С. 858-859.
11. ***Богданов Ю.С.*** Асимптотические характеристики решений линейных дифференциальных систем // Труды 4-го Всесоюз. матем. съезда, 1961. Л., 1964. Т. 2, С. 424-432.
12. ***Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В.*** Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М., 1966. С. 74.

S U M M A R Y

The methods for constructing of characteristic spectral sets of linear differential systems with exponentially damping perturbations and small positive parameter under derivative are considered. The author touches upon the metrical properties of such sets.

Поступила в редакцию 12.03.2003